

一种基于截断机制的稳态优化算法求解多目标优化问题

荆东星 张清安

(湘西民族职业技术学院计算机系 湖南 湘西 416000)

摘要 近年来,多目标优化问题的求解已成为优化领域的一个重要研究方向。为设计一种优化算法使得解集快速收敛并均匀分布于问题的最优 Pareto 面上,提出一种基于截断机制的稳态优化算法求解多目标优化问题。与传统的稳态算法(ε -MOEA)相比,该算法具有无参、解集数量可控以及良好广泛性等特点。实验结果表明,该算法在多目标优化问题中表现良好,与几个经典算法相比具有一定的竞争力。

关键词 多目标优化问题 优化算法 稳态算法

中图分类号 TP301

文献标识码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2018.11.048

A STEADY-STATE OPTIMIZATION ALGORITHM BASED ON TRUNCATION MECHANISM FOR THE MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION PROBLEM

Jing Dongxing Zhang Qing'an

(Department of Computer Science, Xiangxi Vocational and Technical College for Nationalities, Xiangxi 416000, Hunan, China)

Abstract In recent years, the solution of multi-objective optimization problem has become an important research direction in the field of optimization. To design an optimization algorithm to make the solution set converge quickly and uniformly distribute on the optimal Pareto of the problem, a steady-state optimization algorithm based on truncation mechanism was proposed to solve the multi-objective optimization problem in this paper. Compared with the traditional steady-state algorithm, ε -MOEA, the proposed algorithm had the features of no-references, controllable number of solution sets and good universality. The experimental results show that the algorithm performs well in multi-objective optimization and is competitive with several classical algorithms.

Keywords Multi-objective optimization problem Optimization algorithm Steady-state algorithm

0 引言

许多实际优化问题,通常需要同时求解 2~3 个高度复杂、非线性并且带有冲突性的目标^[1]。这类问题通常被定义为多目标优化问题(MOPs)。而多目标优化算法(MOEAs)非常适合于求解此类问题。因此,在过去的几十年里,MOEAs 得到了飞速发展,并在工程领域得到广泛应用^[2-4]。

对于 MOPs 来说,MOEAs 的一个关键优势是基于种群特性,它允许种群中的个体在单个执行过程中同时收敛到 Pareto 面的不同区域。一般来说,可以将 MOEAs 的优化目标简单归纳为以下两个方面^[5]:

1) 收敛:将种群到 MOP 的 Pareto 面的距离最

小化。

2) 分布:种群广泛且均匀的分散在 MOP 的 Pareto 面上。

为了实现以上目标,近年来,研究者提出了大量有效的 MOEAs^[6]。而根据其每次进化过程中产生的子代个数可以将现有的 MOEAs 大致分为两类:一类是基于种群进化的 MOEA^[7];另一类是基于个体进化的稳态 MOEA^[8]。第一类中,具有代表性的算法有 Zitzler 等提出的 SPEA^[9] 及其改进版本 SPEA2^[10], Srinivas 等^[11] 提出的 NSGA,以及 Deb 等^[7] 在此基础上提出的 NSGA-II 等。而第二类的代表性算法则有 Deb 等^[8] 提出的 ε -MOEA。基于种群的 MOEA 一直备受关注,而基于个体的稳态 MOEA 自从 2006 年被提出后,在多目标优化领域鲜有文献出现。

因此,本文首先分析 ϵ -MOEA 所存在的问题,然后提出一种基于截断机制的稳态 MOEA。该算法首先采用 Pareto 支配控制进化种群和归档种群的收敛性,然后采用一种新的截断机制维持归档集种群的分布性能。另外,本文的算法除默认参数外(如:种群大小,变异率,交叉率等),无需任何参数。通过实验比较分析可以发现,本文算法在求解 2~3 维 MOPs 时,能够获得良好性能(收敛性和分布性)的解集。

1 基本概念

1.1 问题描述及相关性质

为了便于描述,本文所采用的优化问题为最小化问题。一般地,最大化问题通常也可以通过公式转换为最小化问题,问题的表达形式可以定义如下:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(x) = f_1(x), \dots, f_m(x) \quad (1) \\ & \text{s. t. } g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & \quad h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\ & \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

式中: J 和 K 分别表示等式约束和不等式约束的个数;

$\Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \in \mathcal{R}^n$ 为问题的决策空间; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega$ 为优化问题的一个候选解; $F: \Omega \rightarrow \mathcal{R}^m$ 构成了 m 个相互冲突的目标函数; \mathcal{R}^m 为目标空间。因此可行的目标解集可以定义为 $\Theta = \{F(x) | x \in \Omega, g_j(x) \geq 0, h_k(x) = 0\}$ 。

在多目标优化中,以下概念得到了很好的定义和广泛应用。

1) Pareto 支配:对于两个不同的解, $x_1, x_2 \in X$, 如果满足式(2),则认为 x_1 支配 x_2 , 并可以用 $x_1 < x_2$ 表示。

$$\begin{cases} f_m(x_1) \leq f_m(x_2) & \forall m = 1, 2, \dots, M \\ f_i(x_1) < f_i(x_2) & \exists i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (2)$$

2) Pareto 最优解集:对于单个解 $x^* \in X$, 如果不存在其他解 $x' \in X$ 满足 $x' < x^*$, 那么它将被视为 Pareto 最优解。所有 Pareto 最优解构成了 Pareto 最优解集。

1.2 稳态 MOEA 模型

2003 年由 Deb 等人首次提出稳态 MOEA^[8], 为多目标优化研究提供了一条新的思路。稳态 MOEA 中, 两个种群(进化种群 EA 和归档集 Archive)同时进行优化。首先通过随机初始生成初始 EA 种群, 将该种群的非支配解集存入到 Archive 内, 然后分别从 EA 和 Archive 中随机挑选一个个体(如图 1 中的 p 和 e)进行交叉变异操作生成一个新的子代个体 c。最后根据 EA 保留机制和 Archive 保留机制分别判断子代个

体能否被 EA 种群或 Archive 种群接纳。其示意图如图 1 所示。

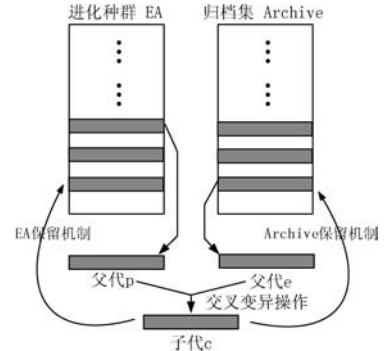


图 1 稳态算法模型

一般而言, EA 保留机制采用的是 Pareto 支配策略, 通过 Pareto 支配策略将收敛性好的个体保留下来。而 Archive 保留机制不仅需要考虑种群的收敛性, 还要保证种群能够均匀且广泛地分布在整个 Pareto 面上。例如, ϵ -MOEA 的 Archive 保留机制采用的是 ϵ -支配策略来保证种群的收敛性和分布性。

2 ϵ -支配的缺陷

ϵ -支配方法是由 Laumanns 等^[12] 提出, 主要思想是根据值将目标空间划分为若干个网格, 每个网格内只允许一个个体存在。因此, 当两个解 p, q 满足下式条件时, 认为 $p \epsilon$ -支配。

$$(1 - \epsilon_i) \cdot f_i(p) \leq f_i(q) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (3)$$

式中: p 和 q 为目标空间的两个解; m 为目标的维度。

图 2 给出了 ϵ -支配的示意图, 个体 p 的 ϵ -支配范围为 ABCDA 所围绕的区域, 而原始 Pareto 支配范围为 PECFP 构成的区域。可以发现, ϵ -支配的区域要明显大于 Pareto 支配的区域。在 ABCDA 区域的个体都将被 p 支配掉。另外, 当同一个网格内存在多个解时, 如图 2 中的 1 和 2, ϵ -支配需要从中选择一个性能最好的解保留下来。首先判断这些解的 Pareto 支配关系, 只考虑其中的非 Pareto 支配解。然后从中挑选距离所在网格的圆点最近的个体。在图 2 中, 解 1 离网格圆点更近, 因此它将被保留。

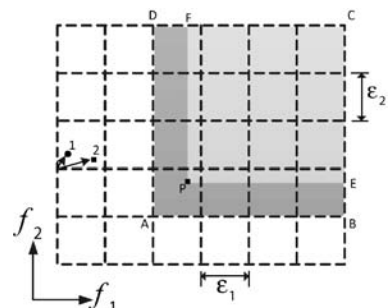


图 2 ϵ -支配

进一步发现,种群的大小以及性能都依赖于值的设置,当 ε 值设置过大,种群的数量将会过小, MOPs 的某些区域可能很难搜索到;而当值设置过小,种群的数量则会过于庞大而限制算法的优化速度。如何为特定问题设置合适的值没有一个很好的解决方案。另外, ε -支配很难保证种群的广泛性,因其特有的性质,位于 Pareto 面边界的解很容易被支配掉^[13]。如图 3 所示,目标空间被划分为 400 个均匀网格,网格的宽度等于 ε 。根据 ε 的性质,在目标空间中最大能够容纳 20 个非 ε 支配解,然而 ε -支配策略实际只能允许 12 个非 ε 支配解在目标空间中。因为这些解将会把与所在网格平行或垂直的其他网格中的所有解支配掉。从图 3 中解的分布可以发现,靠近边界的解的分布要比中间位置的稀疏。

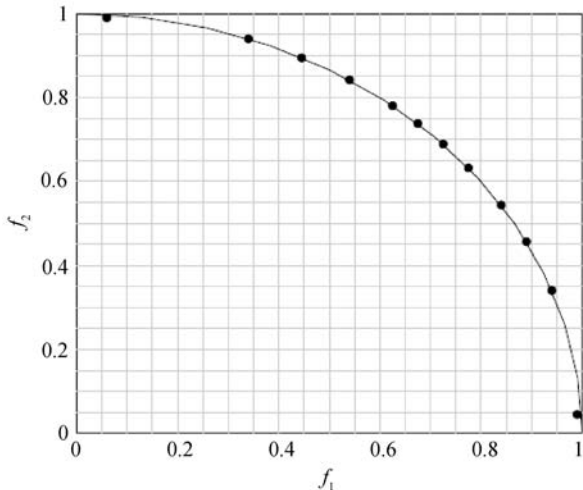


图 3 非支配解集

为了使得 Archive 中的解的数量可控,且具有良好的性能。本文对 ε -MOEA 的 Archive 保留机制进行了修改,并提出了一种新的稳态优化算法。

3 一种新的稳态算法

在本文提出的算法(PTEA)中,采用了 Pareto 支配以及截断机制来共同维持 Archive 种群的性能。Pareto 支配维持 Archive 种群的收敛性,截断机制维持 Archive 种群的分布性。

在截断机制中,首先采用欧氏距离计算各个个体之间的距离,然后选择最短距离的两个个体,再判断它们第二短的距离。如果第二短的距离也相等再判断它们第三短的距离,依次类推,直到找到距离不一样为止,然后删除距离短的个体。其与 SPEA2 的修剪类似,唯一区别是 SPEA2 只考虑了两次比较。而当维度

达到 3 维时,在目标空间中可能存在多个第二短距离相等的情况。

PTEA 的算法步骤如下:

Step 1 初始化参数。设置种群大小 N ,最大进化代数 MAXGEN,交叉率 P_c ,变异率 P_m 。

Step 2 初始化种群。采用随机初始化方法初始化大小为 N 的 EA 种群。

Step 3 构建初始 Archive。将 EA 种群进行 Pareto 非支配排序,将非支配解集复制到 Archive 中。

Step 4 生成单个子个体。从 EA 种群和 Archive 种群中随机挑选一个个体进行交叉变异产生新个体。

Step 5 更新 EA 种群。如果子代个体被 EA 种群中的个体支配,不考虑更新。如果 EA 种群中不存在个体支配新的子代,判断 EA 种群是否存在个体被子代支配。如果存在则随机替换一个被支配的个体,如果不存在,则随机替换 EA 种群中的个体。

Step 6 更新 Archive 种群。首先判断子代与 Archive 种群中个体的支配关系,如果子代被支配,不更新 Archive 种群。如果 Archive 种群中存在个体被子代支配,从中随机挑选一个被子代替换。当 Archive 种群中的解与子代互为非支配解时,需考虑两种情况:(1) Archive 种群数量小于 $N - 1$,此时直接将子代保留到 Archive 中。(2) Archive 种群数量大于 $N - 1$,此时引入截断机制替换 Archive 中的解。这样可以保证种群大小为一个固定值。

Step 7 判断终止条件。本文的终止条件是进化次数 $t = \text{MAXGEN}$ 。如果未满足条件则返回到 Step 4,否则终止条件。

Step 8 输出最终解集,算法结束。

4 性能评价指标及测试问题

4.1 评价指标

为了更好地分析算法的性能,本文采用的评价指标为反向世代距离(IGD)^[14]。IGD 作为综合评价指标,通过计算 Pareto 面到种群的距离的平均值来判断种群的分布性和收敛性。其计算公式表示为:

$$IGD(P) = \frac{\sum_{x^* \in P^*} d(x^*, P)}{|P^*|} \quad (4)$$

式中: P 为最终种群; $|P^*|$ 为 Pareto 面上参考点集 P^* 的数量; $d(x^*, P)$ 为参考点 x^* 到离种群中各个解的最小距离。由式(4)可知,当 IGD 值越小时,种群的性能越好。

4.2 测试问题

本文选择了 8 个具有代表性的测试问题^[15-16]来验证算法的性能,分别为:

- 1) 规整简单型 Pareto 面问题:DTLZ1、DTLZ2 以及凸面 DTLZ2(CDTLZ2);
- 2) 倒转 Pareto 面问题:IDTLZ1、IDTLZ2;
- 3) 非连续问题:DTLZ7;
- 4) 降维问题:DTLZ5;
- 5) 目标范围不一致问题:SDTLZ2。

问题的维度设置为 2 维和 3 维,种群大小统一设置为 100,最大迭代次数设置为 300。本文中给出的数据都是独立重复 30 次得到的平均值。对比的算法都采用实数编码,交叉算子采用模拟二进制交叉,其交叉率 $P_c = 1$,变异算子采用多项式变异,其变异率 $P_m = \frac{1}{n}$,其中 n 为决策空间维度。

本文还对 IGD 数据进行了显著性比较^[17],其中 +、-、= 分别表示比 PETA 显著好、显著差以及没有显著区别。

5 实验结果

本文挑选了 3 种具有代表性的多目标优化算法 (ϵ -MOEA^[8]、NSGA-II^[7] 以及 PESA-II^[18]) 进行对比实验,得到的 3 维优化问题的最终解集。其中为稳态算法,在进化种群中采用 Pareto 支配维持进化种群的收敛性,在归档集中采用 ϵ -支配维持归档集种群的收敛和分布性。 ϵ -MOEA 最终目的是要获得一组良好性能的归档集种群。NSGA-II 采用非支配排序策略将种群划分为若干个非支配层,再根据层序将父代个体逐层保留到下一代,当保留下来的个体大于种群大小时,则在当前非支配层(临界层)中挑选部分个体保留下来。NSGA-II 在临界层中采用聚集距离维持算法的分布性,从该层中挑选分布性好的个体保留下来。SPEA-II 是在 PESA^[19] 基础上的改进,它将目标空间划分为若干个超网格,PESA-II 的过程包括选择超网格以及在该网格中随机选择一个个体保留。

图 4 给出了 PTEA 与其他 3 种算法在 3 目标 DTLZ1 测试问题上的最终解集。从直观上说,PTEA 和 ϵ -MOEA 的分布性表现得最好,然而 ϵ -MOEA 很难搜索到 Pareto 面的边界。通过图 4 可以看出 ϵ -MOEA 的广泛性没有 PTEA 的好。而其他两个算法的最终解

集分布明显不如前面的两个算法。

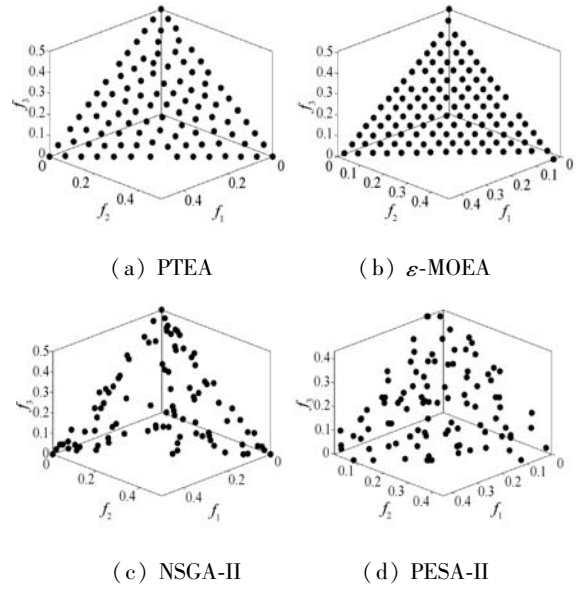


图 4 各算法在 3 目标 DTLZ1 测试问题上的最终解集

图 5 给出的是各算法在 3 目标 DTLZ2 测试问题上的最终解集,不管是均匀性,还是广泛性,PTEA 的表现都要优于其他 3 种算法。PTEA 的解集均匀地覆盖了整个 Pareto 面。而对于其他 3 种算法来说, ϵ -MOEA 和 PESA-II 的性能差不多,都要好于 NSGA-II。NSGA-II 的解集虽然能够广泛地分布在 Pareto 面上,但是它的均匀性不是很理想。

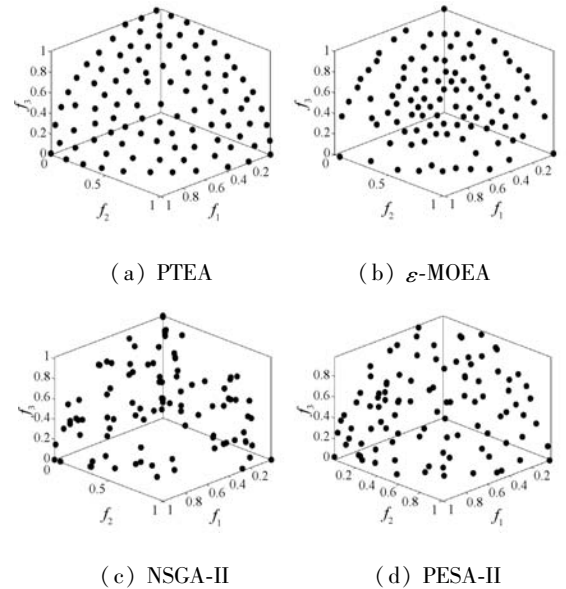
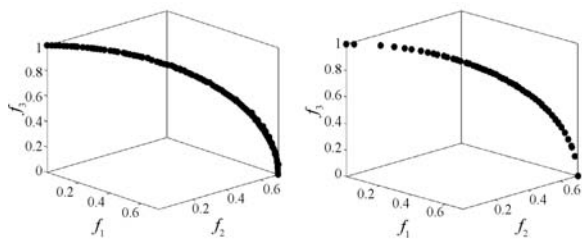


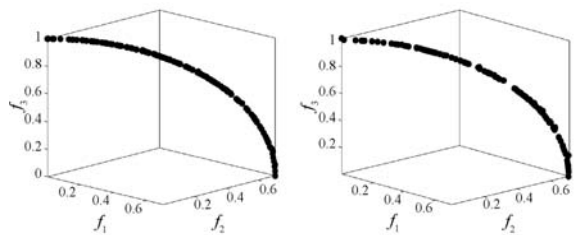
图 5 各算法在 3 目标 DTLZ2 测试问题上的最终解集

在降维问题上,如图 6 所示,PTEA 已经覆盖到了整个 Pareto 面,而在 Pareto 面的两端解的分布明显稀疏与中间部分。而其他两个算法同样有小部分区域没有解的分布。比如图 6(c)的 Pareto 面的上半部分区域以及图 6(d)的 Pareto 面的上半部分和中部区域相对来说都比较稀疏。



(a) PTEA

(b) ε-MOEA

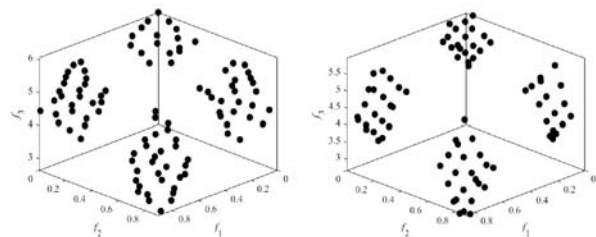


(c) NSGA-II

(d) PESA-II

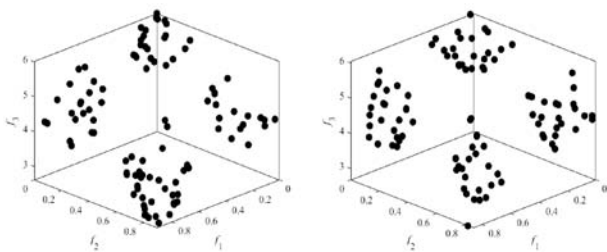
图 6 各算法在 3 目标 DTLZ5 测试问题上的最终解集

图 7 给出了 4 种算法在非连续问题(DTLZ7)的优化结果,该问题的 Pareto 面由 4 个区域组成。可以发现,ε-MOEA 的分布性要稍好于 PTEA,但是广泛性没有本文算法好。在 DTLZ7 问题上,本文算法的分布性与 NSGA-II 和 PESA-II 没有太大的区别。



(a) PTEA

(b) ε-MOEA

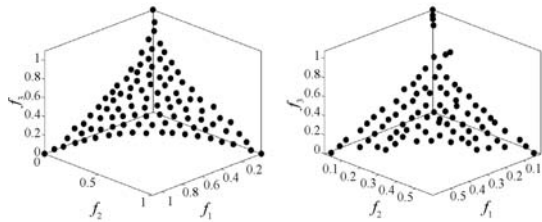


(c) NSGA-II

(d) PESA-II

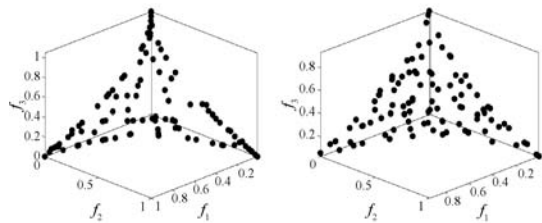
图 7 各算法在 3 目标 DTLZ7 测试问题上的最终解集

对于 CDTLZ1 测试问题,它是 DTLZ1 测试问题的变体,其 Pareto 面为凸面。如图 8 所示,表现最好的是 PTEA,其次是 PESA-II。虽然 ε-MOEA 的解集看似均匀分布,但它没有搜索到整个 Pareto 面,而是大部分解集都聚集到了 Pareto 面的中部位置。而与 ε-MOEA 的解集分布相反的是 NSGA-II 的大部分解集聚集在了 Pareto 面的边界。



(a) PTEA

(b) ε-MOEA

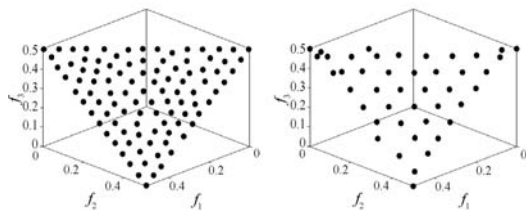


(c) NSGA-II

(d) PESA-II

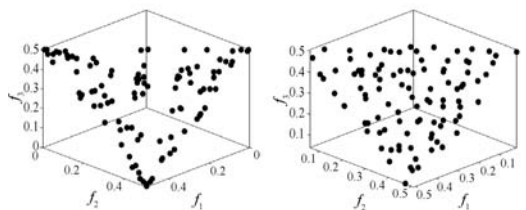
图 8 各算法在 3 目标 CDTLZ1 测试问题上的最终解集

图 9 和图 10 给出了各算法在倒转 Pareto 面问题上的解集分布,在这两个问题上,PTEA 的性能同样也是最好的。



(a) PTEA

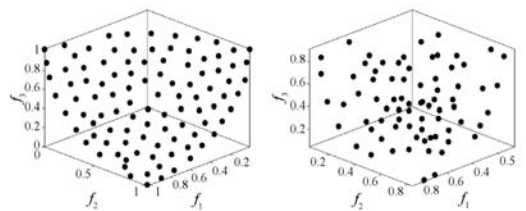
(b) ε-MOEA



(c) NSGA-II

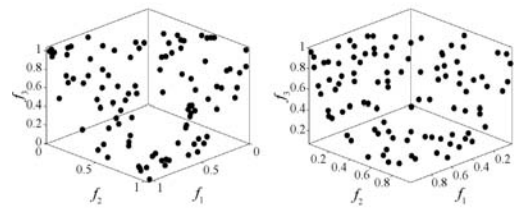
(d) PESA-II

图 9 各算法在 3 目标 IDTLZ1 测试问题上的最终解集



(a) PTEA

(b) ε-MOEA



(c) NSGA-II

(d) PESA-II

图 10 各算法在 3 目标 IDTLZ2 测试问题上的最终解集

最后是 SDTLZ1 问题,该问题的各个目标的取值范围都不相同,本文将各个维度 i 的取值范围设置为 $[0, 2i]$ 。从图 11 中解集的分布可以看出, PTEA 和 ϵ -MOEA 的分布最均匀,而 4 种算法的分布广泛性相当。

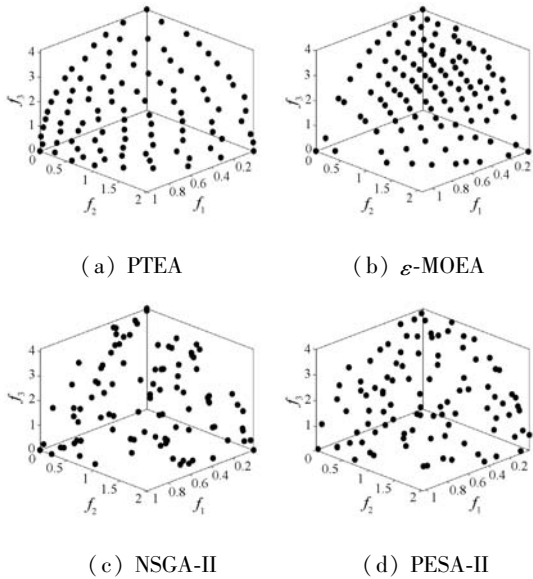


图 11 各算法在 3 目标 SDTLZ2 测试问题上的最终解集

因此,从分布均匀以及分布广度两个角度观察,本文算法都要优于其他 3 种算法。同时,本文算法避免了额外的参数设置,极大提高了算法的实用性。

本文除了从直观上体现算法性能外,还给出了定量分析。如表 1 给出了 4 种算法在不同测试函数上综合性能的数据结果,表中的数据为算法运行 30 次统计得到的 IGD 平均值。表 1 中的 A、B、C、D、E、F、G、H 分别表示 DTLZ1、DTLZ2、DTLZ5、DTLZ7、CDTLZ2、IDTLZ1、IDTLZ2、SDTLZ2 测试问题。

表 1 算法在各个测试问题上的 IGD 值

	M	PTEA	ϵ -MOEA	NSGA-II	PESA-II
A	2	1.805 8e-3	3.830 2e-2	3.373 6e-3	6.193 7e-3
	3	1.984 2e-2	2.407 8e-1	2.773 4e-2	2.676 1e-2
B	2	1.984 2e-2	5.506 6e-2	5.160 4e-3	9.685 1e-3
	3	5.406 3e-2	6.635 9e-2	6.870 0e-2	6.513 1e-2
C	2	4.149 7e-3	5.422 5e-2	5.248 4e-3	1.032 4e-2
	3	5.057 1e-3	6.613 1e-2	5.971 6e-3	1.166 7e-2
D	2	4.764 0e-3	5.274 8e-2	5.304 3e-3	1.068 3e-1
	3	1.195 4e-1	3.339 3e-1	8.085 1e-2	1.309 0e-1
E	2	3.807 8e-3	3.075 3e-2	4.687 4e-3	1.026 3e-2
	3	3.512 2e-2	8.393 8e-2	4.938 3e-2	4.483 4e-2
F	2	1.808 8e-3	2.845 8e-2	2.198 4e-3	4.523 4e-3
	3	1.984 3e-2	3.185 1e-2	2.765 7e-2	2.330 1e-2

续表 1

	M	PTEA	ϵ -MOEA	NSGA-II	PESA-II
G	2	4.110 2e-3	6.383 8e-2	5.089 3e-3	9.644 3e-3
	3	5.467 2e-2	9.341 3e-2	7.003 3e-2	6.777 0e-2
H	2	6.990 7e-3	6.928 2e-2	7.605 2e-3	1.537 0e-2
	3	1.248 9e-1	1.146 6e-1	1.491 6e-1	1.476 9e-1
+/-/=			1/14/1	0/15/1	0/15/1

从表 1 中可以看出,总共 16 个测试问题, PTEA 有 14 个表现得最好,仅 3 维的 DTLZ7 和 3 维的 SDTLZ2 分别稍差于 NSGA-II 和 ϵ -MOEA 算法。而就显著性而言,本文算法有 14 个测试问题显著优于 ϵ -MOEA, 15 个测试问题显著优于 NSGA-II 和 PESA-II。

6 结 语

本文针对稳态多目标优化算法,提出了一种基于截断机制的稳态优化算法(PTEA)。本文还通过一系列对比实验验证了该算法的性能。从算法的最终解集的分布以及 IGD 统计数据可以发现, PTEA 能有效地平衡种群的分布性和收敛性。

虽然 PTEA 能够很好地优化 2~3 维的优化问题,但是它很难在高维优化问题上获得良好的解集。其主要原因是 PTEA 依赖 Pareto 支配机制引导种群收敛,而 Pareto 支配随着维度的增加其作用将急剧减弱。因此,引入一种新的收敛机制将是后续的研究方向。

参 考 文 献

- [1] Altinöz O T, Deb K, Yilmaz A E. Evaluation of the migrated solutions for distributing reference point-based multi-objective optimization algorithms [J]. Information Sciences, 2018, 467: 750 - 765.
- [2] 熊昕, 赖国明. 改进的三级遗传算法定制特定应用片上网络拓扑[J]. 计算机应用与软件, 2018, 35(3): 241 - 246.
- [3] 李阳, 归伟夏. 一种基于改进小生境遗传算法的图像分割方法[J]. 计算机应用与软件, 2017, 34(4): 202 - 206, 248.
- [4] 衡红军, 晏晓东, 王芳, 等. 基于多目标优化的机场行李运输车辆调度问题研究[J]. 计算机应用与软件, 2017, 34(2): 87 - 92, 117.
- [5] 刘元, 郑金华, 邹娟, 等. 基于邻域竞赛的多目标优化算法[J]. 自动化学报, 2018, 44(7): 1304 - 1320.
- [6] 刘红平, 黎福海. 面向多目标优化问题的自适应差分进化算法[J]. 计算机应用与软件, 2015, 32(12): 249 - 252, 269.

- [9] Choi S H, Harney D A, Book N L. A robust path tracking algorithm for homotopy continuation [J]. Computers & Chemical Engineering, 1996, 20(6/7):647-655.
- [10] Mehrotra S. On the implementation of a primal-dual interior point method [J]. Siam J Optimization, 1992, 2(4):575-601.
- [11] Pati Y C, Rezaiifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition [C]//Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. IEEE, 2002:40-44.
- [12] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4666.
- [13] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2):1094-1121.
- [14] 赵永峰, 杨涛. 基于平滑 L_0 范数的压缩感知近场声全息方法 [J]. 压电与声光, 2018(1):73-78.
- [15] 聂栋栋, 弓耀玲. 新的似零范数的分块压缩感知图像重构 [J]. 小型微型计算机系统, 2017, 38(12):2807-2811.
- [16] Koh K, Kim S J, Boyd S. An interior-point method for large-scale l_1 -regularized logistic regression [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2007, 8: 1519-1555.
- [17] Liu Y, Yang S, Wu P, et al. L_1 -norm low-rank matrix decomposition by neural networks and mollifiers [J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2016, 27(2):273-283.
- [18] 陈鹏清. 基于 L_1-L_2 范数的块稀疏信号重构 [J]. 应用数学和力学, 2017, 38(8):932-942.
- [19] 李志明. 基于 L_1 范数的全变分正则化超分辨重构算法 [J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(15):212-216.
- [20] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit [M]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1):33-61.
- [21] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [22] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. Siam Review, 2001, 43(1):129-159.
- [9] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach [J]. IEEE transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4):257-271.
- [10] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength pareto evolutionary algorithm [J]. TIK-report, 2001, 103.
- [11] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [J]. Evolutionary computation, 1994, 2(3):221-248.
- [12] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization [J]. Evolutionary computation, 2002, 10(3):263-282.
- [13] Hernández-Díaz A G, Santana-Quintero L V, Coello Coello C A, et al. Pareto-adaptive ϵ -dominance [J]. Evolutionary computation, 2007, 15(4):493-517.
- [14] Bosman P A N, Thierens D. The balance between proximity and diversity in multiobjective evolutionary algorithms [J]. IEEE transactions on evolutionary computation, 2003, 7(2):174-188.
- [15] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization [M]//Evolutionary multiobjective optimization. Springer London, 2005:105-145.
- [16] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints [J]. IEEE Trans. Evolutionary Computation, 2014, 18(4):577-601.
- [17] Steel R G D, Torrie J H. Principles and procedures of statistics [J]. A Biomedical Approach, 1960, 12(5):441-441.
- [18] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization [C]//Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001:283-290.
- [19] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization [C]//International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000:839-848.

(上接第 288 页)

- [7] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II [C]//International Conference on Parallel Problem Solving From Nature. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000:849-858.