

基于平滑渐进 l_1 范数的压缩感知信号的重构算法

陈 暄¹ 潘春平¹ 龙 丹²

¹(浙江工业职业技术学院 浙江 绍兴 312000)

²(浙江大学 浙江 杭州 310058)

摘 要 信号重构是压缩传感领域中的研究方向之一。针对基于 l_1 范数在信号重构中存在不光滑、可导性差等缺点,构造一种基于 l_1 范数平滑渐进函数。并对该函数的单调性和最优解序列收敛性进行证明。在仿真实验中,通过实例验证该算法的有效性。与经典重构算法在重构指标方面进行比较,实验效果证明该算法的重构效果更好,并且误差小、精度高。

关键词 压缩重构 l_1 范数 平滑渐进

中图分类号 TP391.41

文献标识码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2018.11.049

RECONSTRUCTION ALGORITHM OF COMPRESSED SENSING SIGNAL BASED ON SMOOTH PROGRESSIVE l_1 NORM

Chen Xuan¹ Pan Chunping¹ Long Dan²

¹(Zhejiang Industry Polytechnic College, Shaoxing 312000, Zhejiang, China)

²(Zhejiang University, Hangzhou 310058, Zhejiang, China)

Abstract Signal reconstruction is the research direction in the field of compression sensing. l_1 norm is unsmooth and has poor conductivity in the signal reconstruction. To solve this problem, we constructed a smooth progressive function based on l_1 norm. The monotonicity of the function and the convergence of the optimal solution sequence were proven. In simulation experiments, the effectiveness of the algorithm was verified by examples. Compared with the classical reconstruction algorithm in reconstruction index, the algorithm has better reconstruction effect, fewer errors and higher accuracy.

Keywords Compression reconstruction l_1 norm Smooth progressive

0 引 言

随着无线传感网中技术的快速发展,早期使用 Nyquist 处理信号的方法由于其存在效率低、资源消耗高和硬件成本昂贵等缺点已经被放弃^[1-2]。压缩感知 CS (Compressed Sensing)^[3-5] 理论能够采用远低于 Nyquist 采样条件,使用随机方法获得离散样本。该理论已经广泛地使用在信息论、地球科学、无线通信和模式识别等领域。CS 中的信号重构是恢复原始信号的关键。目前常见的信号重构算法主要分为基于 l_1 范数

的最小凸优化算法和基于 l_0 范数最小的贪婪算法。前者计算量比较庞大,但重建效果好,其代表有:基追踪法 BP (Basis Pursuit)^[6]、梯度投影法 GPSR (Gradient Projection For Sparse)^[7]、凸集交替投影法 POCS (Projection Onto Convex Sets)^[8]、同伦算法 HA (Homotopy Algorithm)^[9] 和最小角度回归法 LARS (Least Angle Regression)^[10] 等。后者具有精度差、计算速度快的特点,其代表有:匹配追踪法 MP (Matching Pursuit)^[11]、正交匹配追踪法 OMP (Orthogonal Matching Pursuit)^[12]、分段正交匹配追踪法 STOMP (Stagewise Orthogonal Orthogonal Matching Pursuit)^[13] 等。文献[14]

提出基于平滑 l_0 范数的压缩感知平面近场声全息法, 实验说明算法具有较好的效果, 但存在需要在感知矩阵、全息面测量声压和稀疏向量共同构成的约束条件下才能建立模型的问题, 提高了计算量。文献[15]提出采用新的近似 l_0 范数的函数, 并结合牛顿算法实现图像重构, 取得了较好的效果, 但是没有对采用简单的分式函数近似估计 l_0 范数进行证明。文献[16]在分块图像中使用 l_1 范数来估计混合高斯脉冲噪声, 取得了较好的结果, 但提高了算法复杂度, 去噪效果不明显。文献[17]提出在 l_1 范数中的基于柔化神经网络的低秩矩阵分解方法, 该方法能够有效降低噪声比, 但算法消耗了更多的时间。文献[18]提出了基于 l_1 和 l_2 范数的稀疏重构算法用于稀疏模型重构, 取得的较好的效果, 但没有与其他重构算法进行比较, 实验结果稍显不足。文献[19]提出了基于 l_1 范数的图像分辨算法, 提高了图像清晰度, 但增加了算法的复杂度。

综上所述, 压缩传感中信号重构最理想的方法是采用基于最小 l_0 范数的重构, 这是一个 NP 问题。因此转换为求解 l_1 最小范数问题来进行解决, 但是由于最小 l_1 范数并不是可导的, 影响重构的效果。本文构造了基于 l_1 范数的光滑逼近函数, 重点分析和证明了该逼近函数的单调性和最优解序列的收敛性。最后通过该平滑渐进近函数求解信号重构问题。

1 预备知识

一般来说, 求解压缩传感的信号重构的时候, 采用求解最小的 l_0 范数问题, 思路如下:

$$\begin{aligned} \min d(x) &= \|x\|_0 \\ \text{s. t. } Ax &= y \end{aligned} \quad (1)$$

文献[20-21]证明了基于最小的 l_0 范数进行信号重构等价于使用求解最小 l_1 范数的信号重构。因此通常采用求解最小 l_1 范数问题去解决信号重构的问题, 因此模型如下:

$$\begin{aligned} \min d(x) &= \|x\|_1 \\ \text{s. t. } Ax &= y \end{aligned} \quad (2)$$

显然, 式(2)是一个凸规划问题^[22]。虽然可以转换为线性规划问题, 但存在求解过程规模扩大, 造成计算速度慢, 重构效果差的问题。

2 基于平滑渐进的 l_1 范数信号重构算法研究

采用平滑逐步渐进的思想, 构造基于 l_1 范数问题

的平滑函数 $F(x)$, 并对其进行单调性和产生最优序列进行研究, 最后将其用于式(2)进行求解。设 R^N 空间中的信号 x , $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, t 为实数, c 为常数, N 为向量 x 的维数。

定义 1 当 $x \in R^N, t > 0$, 则:

$$F(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad F_t(x) = \sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}} \quad (3)$$

定理 1 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(x) = F(x)$, $F_t(x) = \sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}$, $x \in R^N$

证明过程如下:

$$\begin{aligned} F'_t(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}} \cdot \left(x_i^2 + \frac{c}{t^2} \right)' = \\ & \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}} \cdot \left(\frac{-2c}{t^3} \right) = \\ & \sum_{i=1}^N \frac{-c}{t^3 \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}} = \\ & \sum_{i=1}^N \frac{-c}{t^2 \sqrt{(tx_i)^2 + c}} < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

对于任意的 x 和 t 而言:

$$\begin{aligned} F_t(x) - F(x) &= \sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}} - \sum_{i=1}^N |x_i| = \\ & \sum_{i=1}^N \left(\sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}} - \sqrt{x_i^2} \right) = \\ & \sum_{i=1}^N \frac{\frac{c}{t^2}}{\sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}} + \sqrt{x_i^2}} \leq \sum_{i=1}^N \frac{\frac{c}{t^2}}{\frac{\sqrt{c}}{t}} = \\ & \frac{\sqrt{c}N}{t} \end{aligned} \quad (5)$$

因此 $F(x) \leq F_t(x) \leq F(x) + \frac{\sqrt{c}N}{t}$ 。

因为:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[F(x) + \frac{\sqrt{c}N}{t} \right] &= \lim_{t \rightarrow \infty} F(x) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{c}N}{t} = \\ & F(x) + 0 = F(x) \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)化简为:

$$0 \leq F_t(x) - F(x) \leq \frac{\sqrt{c}N}{t} \quad (7)$$

对式(7)的两边取极限得到: $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(x) = F(x)$ 。

证明完毕。

通过定理 1 可以将式(1)改写为如下:

$$\begin{aligned} & \min F_t(x) & (8) \\ \text{s. t. } & Ax = y(t \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

当具有连续的实数时,式(5)的求解非常难。可以通过离散化 t 得到:

$$\begin{aligned} & \min F_t(x) & (9) \\ \text{s. t. } & Ax = y(t_k \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

能够求解该公式是否成立,是本文所需要描述的主要对象。

定理 2 存在集合 $S = \{x | F_t(x) \leq F_k(x)\}$ 具有一定的界限,当 $x^*(t_k)$ 是 $t = t_k$ 时,式(9)获得最优解,所以 x^* 就是式(1)的最优解,因此在 $\{x^*(t_k)\}$ 中存在子序列收敛于 x^* 。

证明如下:

因为 $F_t(x^*(t_k)) \geq F_t(x^*(t_{k+1})) \geq F_{t+1}(x^*(t_{k+1}))$, 且 $F_\infty(x) = F(x) \leq F_t(x)$, 结合集合 S 是具有界限的, 所以 $\{x^*(t_k)\}$ 存在一定的界限, 故存在一个收敛的子序列 $\{x^*(t_k)\}$ 。当变量 i 趋近无穷大, $\{x^*(t_k)\} \rightarrow \bar{x}$, 需要完成证明 $\bar{x} = x^*$ 。采用反证法证明如下:

假设 $\bar{x} \neq x^*$, 则 $F(x^*) - F(\bar{x}) < 0$

取 $\varepsilon_0 > 0$, 假设 $F(x^*) - F(\bar{x}) = -\varepsilon_0$, 又 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(x) = F(x)$, 所以:

$$\exists I_1 > 0, \forall_i \geq I_1, F_t(x^*) - F(x^*) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

因此得到:

$$\begin{aligned} F_t(x^*) - F(\bar{x}) &= F_t(x^*) - F(x^*) + \\ & F(x^*) - F(\bar{x}) < \frac{\varepsilon_0}{2} - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(x^*(t_k)) = F_\infty(\bar{x}) = F(\bar{x})$

因此 $\exists I_2 > 0, \forall_i \geq I_2, F_t(\bar{x}) - F(x^*(t_k)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$

所以,对于 $\forall_i \geq \max\{I_1, I_2\}$ 存在:

$$\begin{aligned} F_t(x^*) - F(x^*(t_k)) &= F_t(x^*) - F(\bar{x}) + \\ & F(\bar{x}) - F(x^*(t_k)) < -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$F_t(x^*) < F_t(x^*(t_k))$ 与 $x^*(t_k)$ 是式(8)的最优解矛盾,所以 $\bar{x} = x^*$ 。

定理 3 式(9)是一个凸规划问题。

证明如下:假设集合 $D = \{x | Ax = y\}$, 其中, A 是一个 $N \times M$ 矩阵, $x \in R^N, y \in R^M$ 对于 $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in D$ 并且 $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$A[\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}] = \lambda Ax^{(1)} + (1 - \lambda)Ax^{(2)} =$$

$$\lambda y + (1 - \lambda)y = y \quad (12)$$

因此, $\lambda x^{(1)} + (1 + \lambda)x^{(2)} \in D$

所以, D 是一个凸问题。

下面证明目标函数 $F_t(x) = \sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}$, $x \in R^N$ 在集合 D 上是一个严格的凸函数。

因为:

$$\begin{aligned} F_t(x + \Delta x) &= \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i + \Delta x_i)^2 + \frac{c}{t^2}} \geq \\ & \sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}} + \sum_{i=1}^N \frac{x_i \Delta x'_i}{\sqrt{x_i^2 + \frac{c}{t^2}}} = \\ & F_t(x) + \nabla F_t(x)^T \Delta x \end{aligned} \quad (13)$$

所以, $F_t(x)$ 在 D 上是凸函数, 而实际上:

$$\nabla^2 F_t(x) = \begin{bmatrix} \frac{t_k}{\sqrt{[(x_1 t_k)^2 + c]^3}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t_k}{\sqrt{[(x_2 t_k)^2 + c]^3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t_k}{\sqrt{[(x_w t_k)^2 + c]^3}} \end{bmatrix} \in$$

$R^{N \times M}$ 是一个正定矩阵。

所以, $F_t(x)$ 在 D 上是严格凸函数, 证明完毕。

定理 4 假设 $x^*(t_k)$ 是 $t = t_k$ 的式(1)的最优解, x^* 是式(2)的全局最优解, 因此, 对于任何一个 $t_k > 0$ 且 $k \rightarrow +\infty$, 则有:

$$\|x^* - x^*(t_k)\| \leq \sqrt{\max \left\{ \frac{2 \sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}}{t_k^2} \right\}} \sqrt{cN} \quad (14)$$

证明: 选择目标函数 $F_t(x)$ 在 $x = x^*(t_k)$ 处的泰勒展开为:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= F_t(x^*(t_k)) + \nabla F_t(x^*(t_k))^T (x - x^*(t_k)) + \\ & \nabla F_t(x^*(t_k))(x - x^*(t_k)) + \\ & o(x - x^*(t_k))^T (x - x^*(t_k)) \end{aligned} \quad (15)$$

令 $x = x^*$, 同时结合一阶求导必要条件, 得到:

$$\begin{aligned} F_t(x) - F_t(x^*(t_k)) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{t_k}{\sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}} (x^* - x^*(t_k))^2 + \\ & o(x - x^*(t_k))^T (x - x^*(t_k)) \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $\nabla^2 F_t(x)$ 为对角矩阵, 因此得到:

$$\begin{aligned} F_t(x) - F_t(x^*(t_k)) &\geq \min \left\{ \frac{t_k}{2 \sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}} \right\} \\ & \|x^* - x^*(t_k)\|_2^2 \end{aligned} \quad (17)$$

又因为 $F_t(x)$ 关于 t 进行单调递减, 因此得到 $F_t(x^*(t_k)) - F_{t+1}(x^*(t_k)) < 0$, 由于 x^* 是式(2)的全局最优解, 因此得到 $F_t(x) - F_t(x^*(t_k)) < 0$.

$$\|x^* - x^*(t_k)\|_2 \leq \max \left\{ \frac{2\sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}}{t_k} \right\} (F_t(x^*) - F(x^*(t_k))) = \max \left\{ \frac{2\sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}}{t_k} \right\} (F_t(x^*) - F(x^*) + F(x^*) - F(x^*(t_k)) + F(x^*(t_k)) - F_t(x^*(t_k))) \leq \max \left\{ \frac{2\sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}}{t_k} \right\} (F_t(x^*) - F(x^*)) \quad (18)$$

将式(8)代入式(18)得到 $0 \leq F_t(x^*) - F(x^*) \leq \frac{\sqrt{cN}}{t}$, 即:

$$\|x^* - x^*(t_k)\| \leq \sqrt{\max \left\{ \frac{2\sqrt{[(x_i t_k)^2 + c]^3}}{t_k^2} \right\}} \sqrt{cN}$$

证明完毕。

综上所述, 根据定理 2, 求解式(9)的算法如下:

- 步骤 1** 输入矩阵 A 和 t_0 , 测量值 y , 阈值 ε 为 10^{-6} , 步长 h ;
- 步骤 2** 令 $k=0, x_0^*(t_0) = A'y$;
- 步骤 3** 令 $t_k = t_0 + kh$, 求解式(9)的最优解 $x^*(t_k)$;
- 步骤 4** 若 $\|x^*(t_k) - x^*(t_{k-1})\| > \varepsilon$, 设置 $k = k + 1$, 返回步骤 3, 否则, 输出 $x^*(t_k)$ 。

3 实验说明

3.1 算法实例说明及重构效果对比

设定:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 5 & 8 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & 4 & 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 7 & 3 \\ -9 & 15 & 4 & 3 & 8 & 7 & 4 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 & -5 & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

假设取 $t_k = 10 + 200k$, 按照算法求解过程, 得到 $F_t(x^*(t_k)), \|x^*(t_k) - x^*(t_{k-1})\|_2$ 和 $x^*(t_k)$ 的计算结果, 如表 1 和表 2 所示。

表 1 数值结果

k	$F_t(x^*(t_k))$	$\ x^*(t_k) - x^*(t_{k-1})\ _2$
1	1.077 68	0.554 66
2	1.058 58	0.045 29
3	1.052 32	0.009 19
4	1.049 20	0.008 59

续表 1

k	$F_t(x^*(t_k))$	$\ x^*(t_k) - x^*(t_{k-1})\ _2$
6	1.045 69	0.003 79
8	1.043 52	0.002 91
10	1.043 20	0.001 21

表 2 数值结果

k	$x^*(t_k)$			
1	(-0.025 17	-0.074 85	0.002 41	-0.006 71
	-0.011 47	0.728 91	0.060 89	0.006 91
	-0.012 32)			
2	(-0.025 17	-0.071 01	0.001 29	-0.003 52
	-0.006 21	0.716 01	0.082 31	0.003 91
	-0.006 51)			
3	(-0.025 17	-0.071 29	0.000 91	-0.002 92
	-0.005 21	0.709 89	0.086 39	0.002 59
	-0.004 91)			
4	(-0.025 17	-0.068 49	0.000 61	-0.001 82
	-0.003 18	0.702 41	0.095 41	0.002 12
	-0.003 31)			
6	(-0.025 17	-0.067 59	0.000 39	-0.001 21
	-0.002 19	0.697 58	0.100 00	0.001 39
	-0.002 23)			
8	(-0.025 17	-0.067 61	0.000 29	-0.000 81
	-0.001 49	0.595 01	0.101 69	0.001 00
	-0.001 10)			
10	(-0.025 17	-0.067 01	0.000 28	-0.000 82
	-0.001 29	0.693 81	0.103 69	0.000 79
	-0.001 29)			

表 1 和表 2 中, 将数据离散化之后, 说明本文算法是可行的。设定一维重构信号 x 的稀疏度 K 为 6, 信号长度为 256, 信号观测度 M 为 64, $f_1 = 50, f_2 = 100, f_3 = 200, f_4 = 400, f_s = 800, t_s = \frac{1}{f_s}, x = 0.3 \sin(2\pi \times 50 \times t_s \times t_s) + 0.6 \sin(2\pi \times 100 \times t_s \times t_s) + 0.1 \sin(2\pi \times 200 \times t_s \times t_s) + 0.9 \sin(2\pi \times 400 \times t_s \times t_s)$ 。图 1 和图 2 分别表示原始信号和频域信号, 图 3 为本文算法的重构效果。

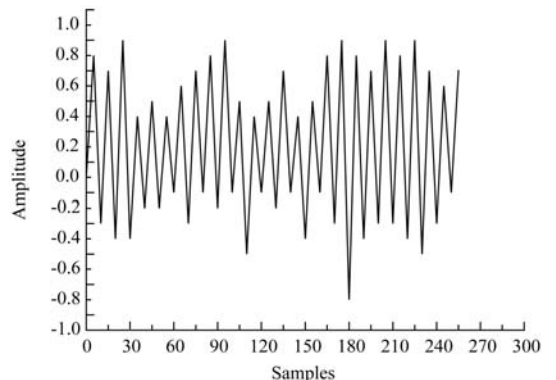


图 1 原始信号

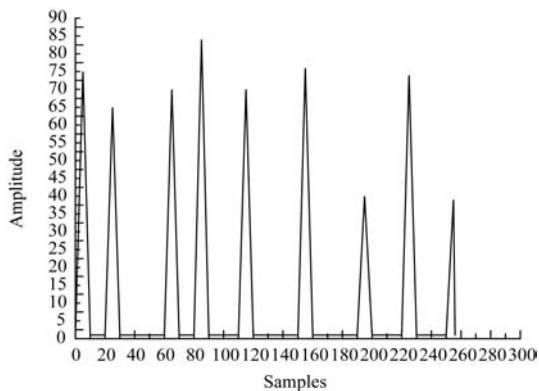


图 2 频域信号

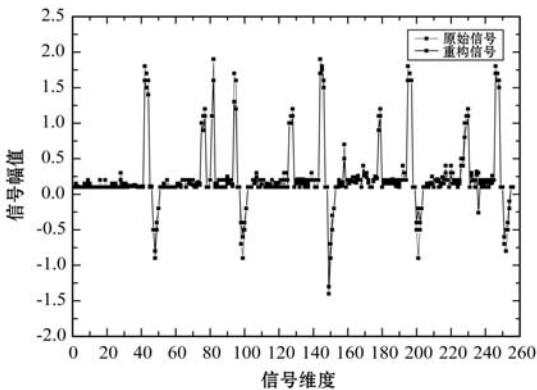


图 3 本文算法重构

3.2 本文算法与其他重构算法的对比

3.2.1 经典的压缩算法对比

将本文算法与经典的 OMP、STOMP 算法在运行时间、迭代次数、信噪比和重构概率 4 个指标方面进行对比。将稀疏度与测量值的比值 (s/M) 作为比较对象, 实验中从高斯随机矩阵中选择 256×512 的测量矩阵 Φ , 使得 $\|\Phi\|_2 = 1$, 稀疏度 s 的取值范围从 1 到 128, 最大迭代次数为 500 次。总共进行 500 次实验且不添加任何噪声, 对实验结果取平均值, 比较 3 种算法的在 4 种指标中的关系。图 4 中, 随着 s/M 的增加, 3 种算法的运行时间不断增加, 但在同一的 s/M 条件下, 本文的算法运行时间明显小于其他 2 种算法。在整个稀疏度范围内, 本文算法的曲线稳定, 这说明使用平滑渐进有助于提高算法的稳定性。图 5 中本文算法的平均迭代次数总体上要小于 STOMP 和 OMP 算法。当 s/M 在 $[0, 0.1]$ 之间, STOMP 算法迭代次数骤增; s/M 在 $[0.1, 0.25]$ 之间, OMP 算法的迭代次数逐渐增加; 当 s/M 在 $[0.25, 0.3]$, 本文算法的迭代次数逐渐增加, 这说明本文的算法的收敛速度得到了提升。图 6 中展示的 3 种算法的 SNR 的值随着 s/M 的增加而逐渐减少, OMP 算法和 STOMP 算法的下降曲线的趋优于于本文算法。这说明在同一个 s/M 条件下, 本文的 SNR 的值要明显优于其他 2 种算法, 进一步说明了本文算法的重构效果要好。从图 7 中发现, 3 种算法的重构概率随着 s/M 的增加而不断降低, 开始阶段本文算法的重

构概率明显高于其他两种算法。随着 s/M 的不断增加, 本文算法的下降趋势明显优于其他两种算法, 这说明采用平滑渐进的方法对 l_1 范数的改进效果是明显的。

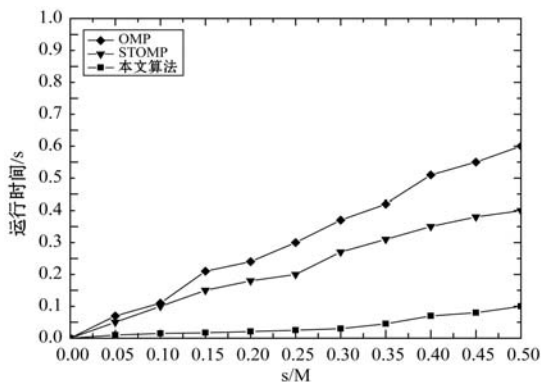


图 4 运行时间对比

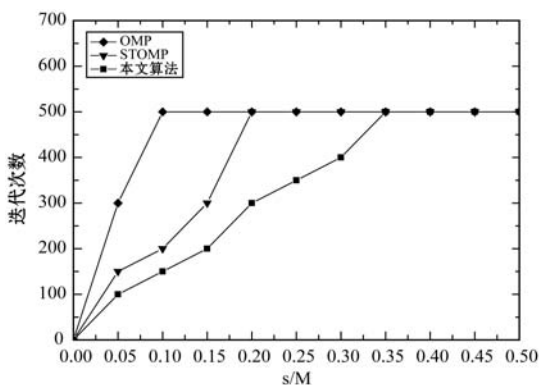


图 5 迭代次数对比

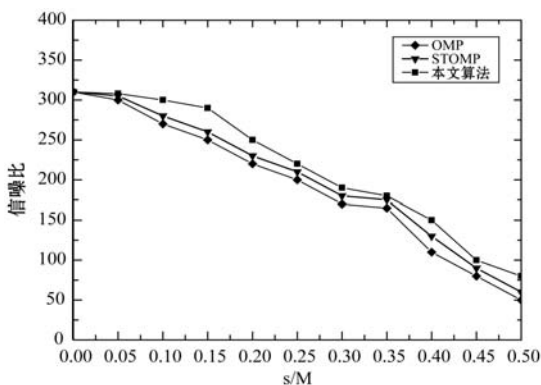


图 6 信噪比对比

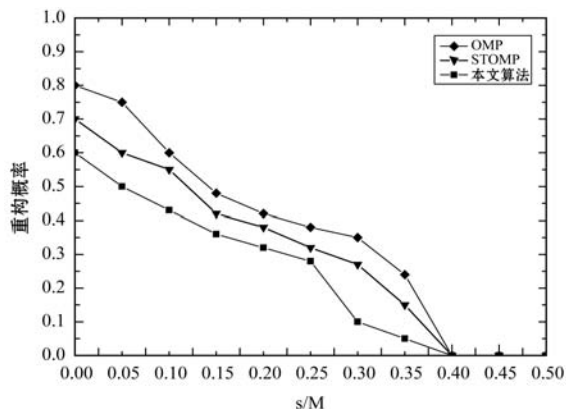
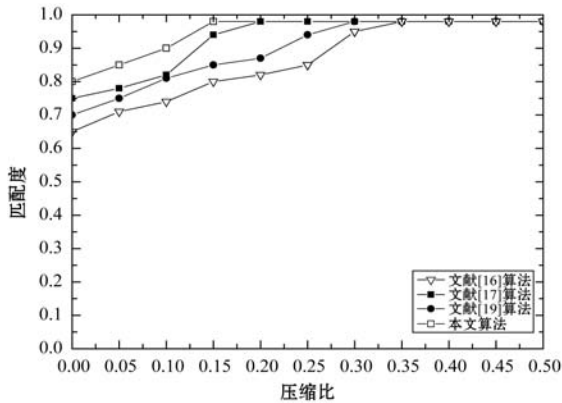


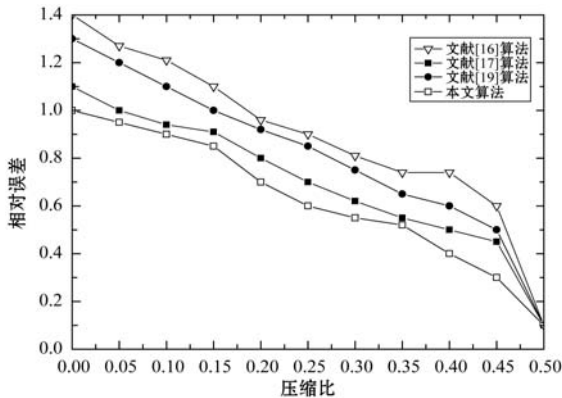
图 7 重构概率对比

3.2.2 与 l_1 范数算法比较

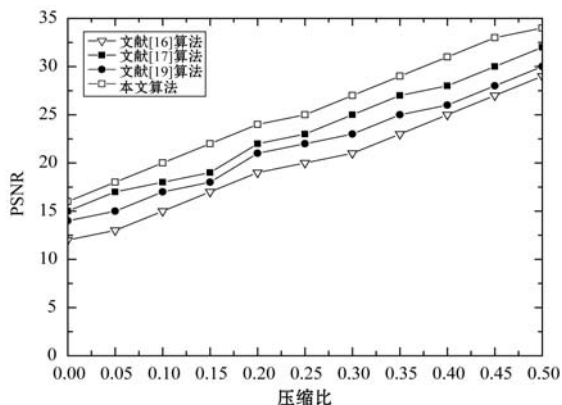
为了进一步验证本文算法的性能,将本文算法和最新的几种关于 l_1 范数算法(算法所需要的参数遵循各自文献中的参数)进行对比,在统一的压缩比下,比较效果如图 8 所示。在图 8(a)中可以发现,本文算法率先完成图像信号的匹配度,这说明本文算法的性能确实有了很大的提高。(b)中发现,本文算法的相对误差明显小于其他 3 种算法,这说明算法的自身的精度高,降低了误差比例。(c)的 PSNR 的值是 4 种算法中最高的,进一步说明了本文算法的重构效率是良好的。从(d)中的运行时间来看,4 种算法的运行时间都有不同程度的增加,但从整体上看本文算法的运行时间要稍微优于其他 3 种算法。



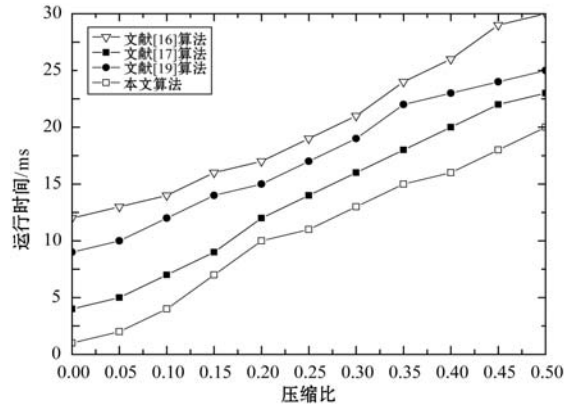
(a) 匹配度比较



(b) 相对误差比较



(c) 峰值信噪比 PSNR 比较



(d) 运行时间比较

图 8 4 种算法对比效果比较

4 结 语

针对最小 l_1 范数不可导的问题,提出并构造了基于平滑渐进的 l_1 范数函数。通过一系列证明推理说明该函数具有渐近的单调性和最优解序列收敛性,从而进一步说明了本文算法能够在一定程度改进信号重构效果。

参 考 文 献

- [1] Akyildiz I F, Su W, Sankarasubramanian Y, et al. A survey on sensor networks [J]. IEEE Communications Magazine, 2002, 40(8):102-114.
- [2] Gong P. Wireless sensor network as a new ground remote sensing technology for environmental monitoring [J]. Journal of Remote Sensing, 2007, 11(4):545-551.
- [3] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2):489-509.
- [4] 王泉, 张纳温, 张金成, 等. 压缩感知在无线传感器网络数据采集中的应用 [J]. 传感技术学报, 2014(11):1562-1567.
- [5] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011, 34(3):425-434.
- [6] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal of Science Computing, 1998, 20(1):33-61.
- [7] Kim S J, Koh K, Lustig M, et al. An interior-point method for large-scale l_1 -regularized least squares [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4):606-617.
- [8] Blatt D, Hero A O. Energy-based sensor network source localization via projection onto convex sets [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(9):3614-3619.

- [9] Choi S H, Harney D A, Book N L. A robust path tracking algorithm for homotopy continuation [J]. Computers & Chemical Engineering, 1996, 20(6/7):647-655.
- [10] Mehrotra S. On the implementation of a primal-dual interior point method [J]. Siam J Optimization, 1992, 2(4):575-601.
- [11] Pati Y C, Rezaiifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition [C]//Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. IEEE, 2002:40-44.
- [12] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4666.
- [13] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2):1094-1121.
- [14] 赵永峰, 杨涛. 基于平滑 L_0 范数的压缩感知近场声全息方法 [J]. 压电与声光, 2018(1):73-78.
- [15] 聂栋栋, 弓耀玲. 新的似零范数的分块压缩感知图像重构 [J]. 小型微型计算机系统, 2017, 38(12):2807-2811.
- [16] Koh K, Kim S J, Boyd S. An interior-point method for large-scale l_1 -regularized logistic regression [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2007, 8: 1519-1555.
- [17] Liu Y, Yang S, Wu P, et al. L_1 -norm low-rank matrix decomposition by neural networks and mollifiers [J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2016, 27(2):273-283.
- [18] 陈鹏清. 基于 L_1-L_2 范数的块稀疏信号重构 [J]. 应用数学和力学, 2017, 38(8):932-942.
- [19] 李志明. 基于 L_1 范数的全变分正则化超分辨重构算法 [J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(15):212-216.
- [20] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit [M]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1):33-61.
- [21] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [22] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. Siam Review, 2001, 43(1):129-159.
- [9] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach [J]. IEEE transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4):257-271.
- [10] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength pareto evolutionary algorithm [J]. TIK-report, 2001, 103.
- [11] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [J]. Evolutionary computation, 1994, 2(3):221-248.
- [12] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization [J]. Evolutionary computation, 2002, 10(3):263-282.
- [13] Hernández-Díaz A G, Santana-Quintero L V, Coello Coello C A, et al. Pareto-adaptive ϵ -dominance [J]. Evolutionary computation, 2007, 15(4):493-517.
- [14] Bosman P A N, Thierens D. The balance between proximity and diversity in multiobjective evolutionary algorithms [J]. IEEE transactions on evolutionary computation, 2003, 7(2):174-188.
- [15] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization [M]//Evolutionary multiobjective optimization. Springer London, 2005:105-145.
- [16] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints [J]. IEEE Trans. Evolutionary Computation, 2014, 18(4):577-601.
- [17] Steel R G D, Torrie J H. Principles and procedures of statistics [J]. A Biomedical Approach, 1960, 12(5):441-441.
- [18] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization [C]//Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001:283-290.
- [19] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization [C]//International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000:839-848.

(上接第 288 页)

- [7] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II [C]//International Conference on Parallel Problem Solving From Nature. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000:849-858.