

改进差分进化算法求解 B 样条曲线曲面拟合问题

李小艳 陈绍平

(武汉理工大学理学院 武汉 湖北 430000)

摘要 利用 B 样条进行数据拟合的关键在于 B 样条参数(节点矢量和控制顶点)的选取,同时把节点向量和控制顶点视为变量,拟合问题就演变为多维多变量高度非线性的最优化问题。由于差分进化算法(DE)在处理数值优化问题时相比于其他基于种群的进化算法收敛速度更快、稳定性更好,提出一种改进的差分进化算法来处理带噪声数据点的 B 样条曲线曲面最小二乘拟合。试验产生了多重节点。将其与基本的差分进化算法的试验结果进行比较,得到的 BIC 值和残差平方和更小。

关键词 B 样条 差分进化算法 最小二乘拟合 随机游走 混沌系统

中图分类号 TP391

文献标识码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2018.03.052

SOLVING B-SPLINE CURVE AND SURFACE FITTING PROBLEMS BY IMPROVED DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM

Li Xiaoyan Chen Shaoping

(School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430000, Hubei, China)

Abstract The key to data fitting using B-spline is the selection of B-spline parameters (node vector and control vertex), while the node vector and control vertex are regarded as variables. The fitting problem evolves into a highly nonlinear multi-dimensional multivariable optimization problem. Because the differential evolution algorithm (DE) has faster convergence and better stability than other population-based evolutionary algorithms when dealing with numerical optimization problems, an improved differential evolution algorithm was proposed to deal with B-spline curve and surface least squares fitting. The experiment produced multiple nodes. Compared with the experimental results of the basic differential evolution algorithm, the sum of squares of residuals and BIC values was smaller.

Keywords B-Spline Differential evolution algorithm The least squares fitting Random walk Chaos system

0 引言

随着计算机运行速度的提高和逆向工程的快速发展,从 20 世纪 90 年代中期起,B 样条曲线曲面拟合一直是 CAGD 领域的研究热点,也是 CAGD 领域的经典问题之一^[1]。B 样条具有几何变换不变性、局部支撑性、凸包性、变差缩减性等诸多优良性质,这使得它成为形状数学描述的主流方法,并广泛应用于数据可视化与逼近、医学图像轮廓重构和几何建模等领域^[2]。

解决 B 样条曲线曲面拟合问题的关键在于 B 样条节点矢量和控制顶点的选取,合适的节点矢量与控制顶点能保证拟合曲线的光滑度和拟合效果。把节点

矢量和控制顶点均视为变量时,拟合问题就变为一个多维多变量高度非线性的最优化问题。解决该问题的方法大致可以被分为三类:传统的节点插入和节点删除方法、支配点和特征点方法以及人工智能算法。传统的方法一般是将节点向量进行固定,得到一个关于控制顶点的线性系统,但是这些方法并不能处理带有不连续点、尖点和拐点的复杂型曲线。支配点和特征点方法是通过提取数据点的形状信息(包括拐点、折痕点和曲率极值点等)用于节点的选择,但是这些方法往往仅限于连续曲线。近年来,利用人工智能算法求解并优化 B 样条拟合问题受到诸多学者的关注。如 Yoshimoto 等^[3]提出了一种实数编码的遗传算法对平面曲线进行拟合,该方法能自动的确定节点的数量和

位置,不仅可以处理光滑的数据拟合问题,也可以处理带尖点和不连续点的数据拟合问题;周明华等^[4]采用遗传算法同时对数据点的参数化和节点矢量进行优化,与传统方法相比取得了较高的拟合效果;穆国旺等^[5]提出一种改进的遗传算法,将误差精度考虑在内,实现了在给定误差下能使用最少的控制顶点进行 B 样条曲线拟合,但是该方法的运算时间较长;Adi 等^[6]采用粒子群优化(PSO)方法进行 NURBS 曲线拟合,该方法将控制顶点作为待求解的变量,但是误差比较大;Galvez 等^[7]利用 PSO 通过固定节点个数自适应的确定节点的位置优化拟合曲线;Ulker 等^[8]提出将人工免疫算法(AIS)应用于求解 B 样条曲线拟合问题上,得到较好的结果;Zhao 等^[9]在 B 样条曲线逼近问题中采用了一种新颖的随机优化方法,利用高斯混合模型和聚类技术来实现自适应节点配置,但该方法仅对封闭曲线进行了拟合实验。何兵朋等^[10]对差分进化算法的变异操作进行改进,设计出一种新的 B 样条曲线拟合方法。近几年,许多学者也不断的对这些智能算法进行改进来改善 B 样条拟合效果。如 Trejo-Caballero G 等^[11]设计出一种分层编码方法,将节点与控制顶点分别进行二进制编码和实数编码,利用遗传算法进行拟合,得到了较好的拟合效果。

在文献[13]中,他们对 DE、PSO 和 EA 在处理数值优化问题时的表现进行了评估,与其他方法相比,DE 展示出了较高的优越性。因此本文在诸多学者研究的基础上,将一种改进的自适应差分进化算法应用于解决 B 样条曲线曲面最小二乘拟合问题。此方法采用了 DE/current-to-best/的变异策略和带有随机游走(Random Walk)的交叉操作,利用随机游走的随机机制弥补 DE/current-to-best/容易早熟收敛的缺陷。同时为了跳出局部最优解,利用混沌系统的随机性与遍历性设计出一个针对当前种群最优解的局部搜索操作,有效地平衡了 DE 的开发能力和探索能力。新的差分进化算法在进行 B 样条曲线曲面拟合时能够根据数据点分布特征配置内节点的位置,并在需要时产生多重节点。试验结果表明,与标准的差分进化算法相比,用本文的方法得到的 B 样条曲线曲面逼近精度更高。

1 B 样条曲线的最小二乘拟合

在节点矢量 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n+2k+1}\}$ 已知的情况下讨论 B 样条曲线的最小二乘拟合,取 M 个二维拟合数据 $\{(x_j, \tilde{f}(x_j))\}_{j=0}^{M-1}$:

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j) + \varepsilon_j \quad (1)$$

式中: $j=0, 1, \dots, M-1$; $x_j = [a, b]$, $f(x)$ 为采样函数(对于散乱数据来说, $f(x)$ 是未知的), ε 为噪声误差, N 为采样数量, n 为内节点个数, $[a, b]$ 为拟合区间。 k 次 B 样条目标曲线为:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n+k} p_i N_{i,k}(x) \quad x \in [a, b] \quad (2)$$

要求满足端点插值 $S(a) = \tilde{f}(x_0)$, $S(b) = \tilde{f}(x_{M-1})$, 并且其余数据点 $\{(x_j, \tilde{f}(x_j))\}_{j=1}^{M-2}$ 在最小二乘意义上被逼近,即数据点与拟合曲线上对应点的残差平方和达到最小:

$$Q = \sum_{j=1}^{M-2} \|S(x_j) - \tilde{f}(x_j)\|^2 \quad (3)$$

式中: $p_i (i=0, 1, \dots, n+k)$ 为控制顶点, $N_{i,k}(x) (i=0, 1, \dots, n+k)$ 为由 de-Boor 递推公式定义的 k 次 B 样条基函数(本文选择三次 B 样条曲线):

$$N_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq x < u_{i+1} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{u_{i+k+1} - x}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x)$$

$\|\cdot\|$ 是欧氏距离。端节点设置为 $k+1$ 重节点: $u_0 = u_1 = \dots = u_k$, $u_{n+k+1} = u_{n+k+2} = \dots = u_{n+2k+1}$ 对于一组固定的内节点,采用标准的最小二乘技术,欲使式(3)中的 Q 达到最小,应使它关于 $n+k-1$ 个控制顶点的导数为 0,于是就得到了 $n+k-1$ 个以 $p_i (i=1, 2, \dots, n+k-1)$ 为未知量的线性方程组:

$$(N^T N)P = N^T R \quad (4)$$

这里 N 是 $(M-2) \times (n+k-1)$ 的标量矩阵:

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,k}(x_1) & \dots & N_{n+k-1,k}(x_1) \\ N_{1,k}(x_2) & \dots & N_{n+k-1,k}(x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{1,k}(x_{M-2}) & \dots & N_{n+k-1,k}(x_{M-2}) \end{bmatrix}$$

$$P \text{ 和 } R \text{ 表示为: } P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n+k-1} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{M-2} \end{bmatrix}$$

其中, $r_j = \tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_0) N_{0,k}(x_j) - \tilde{f}(x_{M-1}) N_{n+k,k}(x_j)$, $j=1, 2, \dots, M-2$, 本文采用全主元高斯-约当消元法求解式(4)得到 $n+k-1$ 个控制顶点的值。

2 差分进化算法原理

差分进化算法 DE(Differential Evolution)与其他遗

传类型算法相似,以迭代的方式对种群中个体进行变异、交叉和选择操作直到根据适应度函数找出最佳个体。标准的DE算法描述如下:

首先根据待解决问题提前假设种群规模 NP ,在解空间中随机生成 NP 个 D 维随机向量 $X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,D}\}$,每个 X_i 代表需要解决的问题的一个可行解,也叫种群中的一个个体。

2.1 差分变异操作

变异就是指从当前种群中随机选择几个个体得到差分矢量乘上变异系数作用于目标个体对其产生扰动,生成变异个体。五种最常用的差分变异策略如下:

$$\text{DE/rand/1: } V_i^t = X_{r_1}^t + F \cdot (X_{r_2}^t - X_{r_3}^t)$$

$$\text{DE/rand/2: } V_i^t = X_{r_1}^t + F \cdot (X_{r_2}^t - X_{r_3}^t) + F \cdot (X_{r_4}^t - X_{r_5}^t)$$

$$\text{DE/best/1: } V_i^t = X_{\text{best}}^t + F \cdot (X_{r_1}^t - X_{r_2}^t)$$

$$\text{DE/best/2: } V_i^t = X_{\text{best}}^t + F \cdot (X_{r_1}^t - X_{r_2}^t) + F \cdot (X_{r_3}^t - X_{r_4}^t)$$

$$\text{DE/current-to-best/1:}$$

$$V_i^t = X_i^t + F \cdot (X_{\text{best}}^t - X_i^t) + F \cdot (X_{r_1}^t - X_{r_2}^t) \quad (5)$$

式中: r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 表示从当前种群中随机选择的5个互不相同且不等于 i 的个体的下标, t 表示当前进化代数, X_{best}^t 表示第 t 代种群中的最佳个体, F 为缩放,用来控制差分矢量的扰动。

2.2 交叉操作

将目标个体 X_i^t 与变异个体 V_i^t 依交叉概率 CR 进行重组得到一个试验个体 U_i^t 。交叉的目的是丰富种群中的个体,提高多样性。本文选取二项交叉操作:

$$u_{i,j}^t = \begin{cases} v_{i,j}^t & \text{if } (\text{rand}_1(0,1) \leq CR \text{ or } j = j_{\text{rand}}) \\ x_{i,j}^t & \text{otherwise} \end{cases}$$

式中: $CR \in [0,1]$, $\text{rand}_1(0,1)$ 为均匀分布的随机数, j_{rand} 为介于1到 D 的随机整数下标索引,可以确保试验个体中至少有一个基因是由变异个体贡献的。

2.3 选择操作

DE根据个体的适应度函数值对目标个体和试验个体进行贪婪选择,以最小化问题为例,具体操作如下:

$$X_i^{t+1} = \begin{cases} U_i^t & \text{if } \text{fitness}(U_i^t) \leq \text{fitness}(X_i^t) \\ X_i^t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

3 改进差分进化算法的B样条拟合

(1) 差分变异操作。选择式(5)DE/current-to-best/1的变异策略,该策略具有局部搜索能力强,收敛速度快的优点,但全局搜索能力较弱,容易陷入局部最优。缩放因子 F 由下式决定:

$$F_t = 0.5 + 0.3 \times \frac{t}{T_{\text{max}}}$$

(2) 交叉操作。算法早熟收敛是因为随着DE的进化,种群中个体渐渐聚集,差异减小。为了避免局部最优,本文借鉴文献[19]中的带有随机游走的交叉操作,随机游走是一个可以向任何方向前进的、到达任何位置的无规则运动,这种随机性机制在用于DE搜索过程时可以增加种群的多样性,有效避免早熟现象。交叉操作的表达式如下:

$$u_{i,j}^t = \begin{cases} v_{i,j}^t & \text{if } \text{rand}_2 < CR \text{ or } j = j_{\text{rand}} \\ a + \text{rand}_2 \times (b - a) & \text{elseif } \text{rand}_2 < RW \\ \xi_{i,j}^t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

交叉概率 CR 和参数 RW 的表达式如下:

$$CR = 0.79 + 0.2 \times \frac{t}{T_{\text{max}}}$$

$$RW = 0.1 - 0.099 \times \frac{t}{T_{\text{max}}}$$

在DE中差分矢量缩放因子 F 和交叉概率 CR 对优化性能有着重要的影响。Storn等^[15]建议过参数的选取范围应为: $F \in [0.5, 1]$ 、 $CR \in [0.8, 1]$,本文对参数的设置符合这个条件。

(3) 混沌局部搜索操作。设计出一种混沌局部搜索操作,在当前最优个体的邻域范围内搜索更优解,以跳出局部最优。通过一维Logistic映射生成混沌序列,迭代公式如下:

$$Z_{i+1} = \mu Z_i (1 - Z_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

式中: μ 为控制参数, $\mu \in (0, 4]$, $Z_i \in (0, 1)$ 。当 $\mu = 4$ 时,序列将是完全混沌的。混沌局部搜索的具体操作是:随机生成两个 D 维向量 $\alpha_0 = \{\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{0,D}\}$, $\beta_0 = \{\beta_{0,1}, \beta_{0,2}, \dots, \beta_{0,D}\}$, $\alpha_{0,j}, \beta_{0,j} \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, D$ 。取 $\mu = 4$,通过式(8)迭代得到 $\alpha_{(l+1)j} = 4\alpha_{lj}(1 - \alpha_{lj})$, $\beta_{(l+1)j} = 4\beta_{lj}(1 - \beta_{lj})$ 两组包含 L 个个体混沌系统 $\{\alpha_l\}$ 和 $\{\beta_l\}$, $l = 0, 1, \dots, L$ 。对当前代的最优个体 X_{best}^t 进行 L 次局部搜索,产生 L 个混沌变异个体:

$$X_l = X_{\text{best}}^t + \lambda(\alpha_l - \beta_l) \quad (9)$$

式中: λ 为局部搜索系数,针对不同的实例 λ 取不同的值。若在搜索结果中找到了优于当前代最优个体的内节点向量,则对其进行取代。

(4) 适应度函数。使用统计学中贝叶斯信息准则 BIC ^[23]作为适应度函数,表达式为:

$$BIC = M \times (\ln Q) + (\ln M) \times (2n + k + 1) \quad (10)$$

式中: M 为数据点数量, Q 为由式(3)计算所得的残差平方和, $n + k + 1$ 代表控制顶点个数, n 代表内节点个数。适应度函数值越小,代表找到的节点矢量越优,拟合误差越小。

在 B 样条曲线拟合问题中,节点数量是变化的,控制顶点的个数也会随之改变,如果控制顶点太少,无法还原出原数据点分布特征,拟合误差就会增大;控制顶点太多,拟合曲线的光滑度会降低。因此如果只以残差平方和 Q 为目标函数,就会忽略模型复杂度和控制顶点个数对曲线几何形状的影响。选取 BIC 为适应度函数,它的第一项能够保证模型函数的精度,第二项添加了对模型函数自由参数个数的惩罚,通过精度与计算复杂度之间的平衡,获得最优的逼近模型。BIC 的另一个优势在于它避免了使用主观参数(如误差界限和平滑因子)来判断拟合模型。

基于该算法的三次 B 样条曲线拟合流程如下:

输入:待拟合数据点 $\{(x_j, \tilde{f}(x_j))\}_{j=0}^{M-1}$, 种群规模 NP , 内节点个数 n , 设置最大迭代次数 T_{\max} 。

输出:最佳内节点。

Step1 初始化种群 $\{\xi_i\}_{i=1}^{NP}$, 置进化代数 $t=0$ 。

Step2 利用式(8)求出种群中每个内节点个体的适应度值,获得最优个体及其对应的适应度值。

Step3 判断迭代是否达到 T_{\max} ,若是,退出,否则执行下一步。

Step4 对种群中个体根据式(5)和式(7)进行变异和交叉操作。

Step5 按照式(6)进行选择操作,生成新一代个体,令 $t=t+1$ 。

Step6 判断种群是否陷入局部最优,若是,则根据式(8)和式(9)进行混沌局部搜索,更新种群中最优个体。若否,返回 Step2。

4 仿真实验与分析

为了验证本文算法在解决 B 样条曲线曲面最小二乘拟合问题上的有效性,选择 5 个测试函数进行试验分析。

4.1 曲线拟合

所有曲线拟合的试验中,采样数据点均由测试函数根据式(1)得到,噪声误差 ε_j 取均值为 0,方差为 1 的标准正太分布随机数。差分进化算法的参数均设置为种群规模 $NP=100$,最大迭代次数 $T_{\max}=200$,由于本文实验拟合区间均为 $[0,1]$,局部搜索系数我们取较小的值 $\lambda=0.025$ 。对于每一个测试函数我们都在取值范围内选取 $M=201$ 个数据点,试验在同等条件下重复 30 次。

例 1 $f_1(x) = \frac{90}{1 + e^{-100(x-0.4)}}, x \in [0,1]$ 。该函数

在 $x=0.4$ 附近出现了一个类似台阶的形状。选择此函数是因为它代表了一类在某点处发生剧烈变化的数据分布情况。

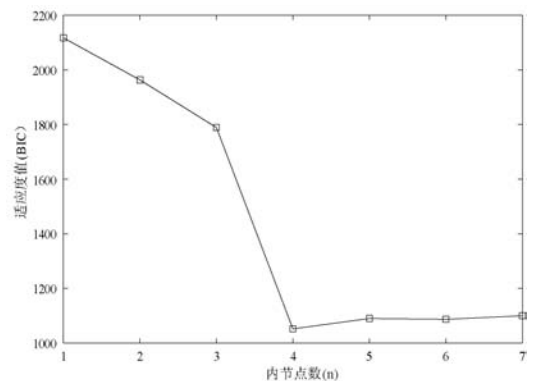
$$\text{例 2 } f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.01 + (x-0.3)^2} & 0 \leq x < 0.6 \\ \frac{1}{0.015 + (x-0.65)^2} & 0.6 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

该函数是多峰值的分段函数, $x=0.6$ 是它的不连续点。

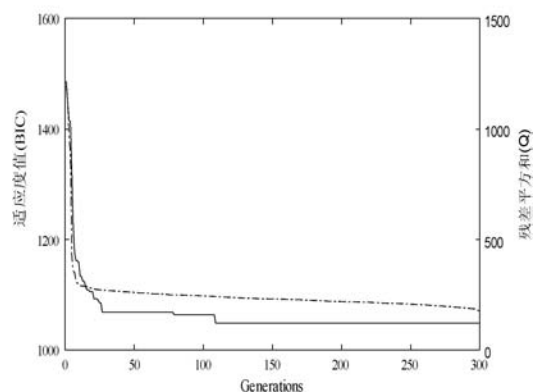
$$\text{例 3 } f_3(x) = \frac{100}{e^{|10x-5|}} + \frac{(10x-5)^2}{500}, x \in [0,1]$$

此函数代表了出现尖点的情况。

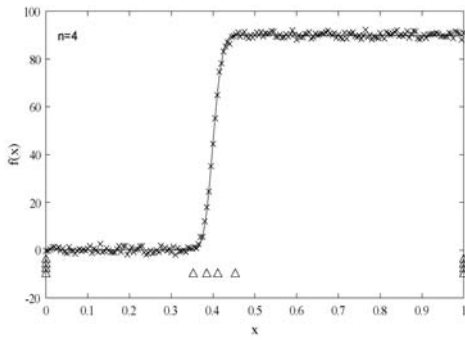
图 1(a)、图 2(a)、图 3(a)分别为本文算法对取自函数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 的数据点进行试验得到的 BIC 值与内节点数之间的关系,从图中可以得到 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 对应的最佳拟合内节点个数分别为 4、8、5。图 1-3 中的(b)显示了 BIC 值与残差平方和 Q 的变化情况,实线表示适应度 BIC,虚线表示残差平方和 Q ;图 1-3 中的(c)分别绘出了例 1-例 3 由最佳内节点得到的最佳拟合效果图,三角形标出了最佳内节点的位置, \times 是拟合数据点,实线是 B 样条拟合曲线。



(a) BIC 值与内节点数之间的关系

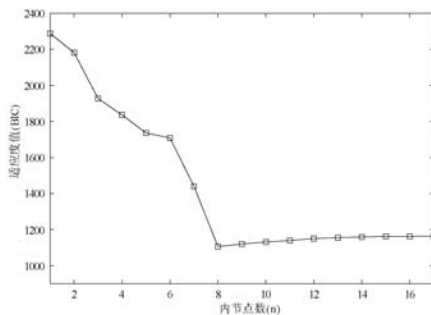


(b) BIC 值和残差平方和随迭代次数变化的情况

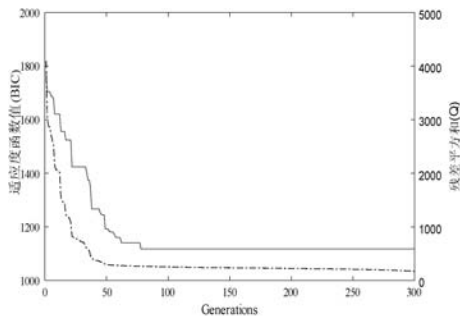


(c) 最佳拟合效果图

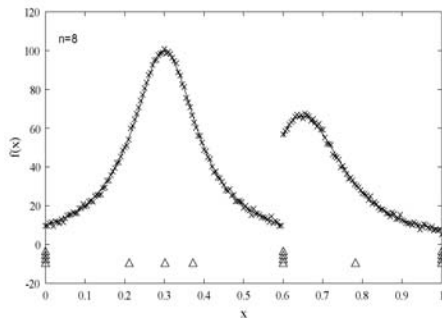
图 1 例 1 函数拟合结果



(a) BIC 值与内节点数之间的关系

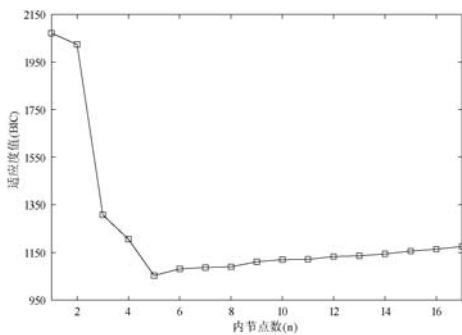


(b) BIC 值与残差平方和随迭代次数变化的情况

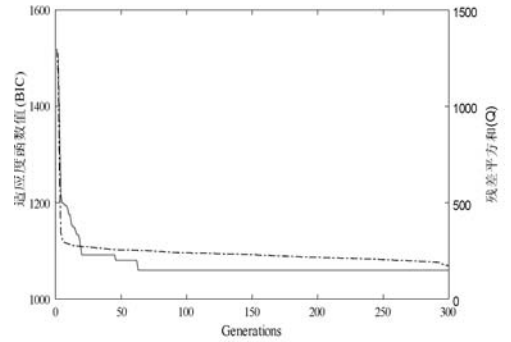


(c) 最佳拟合效果图

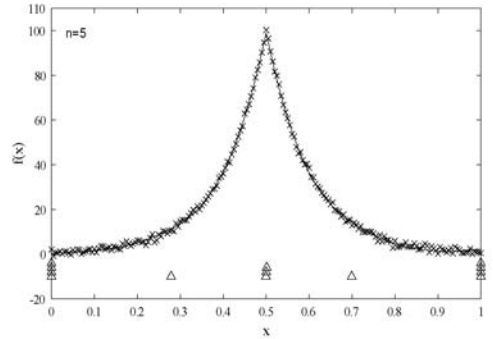
图 2 例 2 函数拟合结果



(a) BIC 值与内节点数之间的关系



(b) BIC 值与残差平方和随迭代次数的变化情况



(c) 最佳拟合效果图

图 3 例 3 函数拟合结果

图 1(b)、图 2(b)、图 3(b)为本文算法对例 1 - 例 3 进行拟合过程中随着迭代次数的增加,最佳个体的适应度值和残差平方和的变化曲线。从图中可以看出,对于每一个测试函数,适应度值基本都在在 100 代左右收敛,说明我们的算法收敛速度快且结果稳定。图 1 - 图 3 中(c)对应例 1 - 例 3 的拟合效果图与文献 [3,10,12] 中的拟合结果一致,并且拟合效果较好。必须说明的是对于三次 B 样条曲线,如果某个内节点的重度为 4,就说明该三次 B 样条曲线在该点处是不连续的,函数 $f_2(x)$ 的拟合结果就说明了这种情况。这表示本文的算法能够根据数据点的分布特征来自分配节点位置,使拟合结果与数据点的分布特征一致。三个拟合效果图可以说明本文算法不仅能够较好地拟合如例 1 这种在某点处发生突变的光滑曲线,也能够处理例 2、例 3 这种带有间断和尖点的情况。例 2 的函数图像在 $x=0.6$ 处发生间断,我们的方法相应的在该点处产生了四重节点,根据 B 样条曲线的性质,拟合曲线在 $x=0.6$ 处也发生了间断。

将传统的带五种不同变异操作的差分进化算法分别与本文方法进行比较。进行 30 次试验,表 1、表 2 给出的是在相同节点数量的情况下对应于例 1 - 例 3 的试验结果,总结的是 30 次试验的最小、最大以及平均的适应度值(BIC)和残差平方和(Q)。从表 1、表 2 中可以看出,由本文方法找到的最佳节点矢量对应的适应度值(BIC)和残差平方和(Q)都比传统的差分进化算法更小。这说明我们的方法在处理 B 样条曲线最小

二乘拟合时,拟合效果更好、拟合精度更高。

表 1 传统差分进化算法与本文算法的比较

测试函数		DE/rand/1		DE/rand/2		DE/best/1	
		BIC	Q	BIC	Q	BIC	Q
$f_1(x)$	Min	1 070	161	1 073	167	1 062	152
	Max	1 075	173	1 079	175	1 074	172
	Avg	1 073	173	1 075	172	1 072	172
$f_2(x)$	Min	1127	175	1 120	168	1 115	161
	Max	1 129	178	1 127	182	1 130	173
	Avg	1 127	177	1 122	179	1 124	170
$f_3(x)$	Min	1 072	160	1 075	163	1 079	161
	Max	1 077	166	1 083	168	1 084	167
	Avg	1 074	165	1 079	165	1 083	165

表 2 传统差分进化算法与本文算法的比较

测试函数		DE/rand/2		DE/current-to-best/2		本文方法	
		BIC	Q	BIC	Q	BIC	Q
$f_1(x)$	Min	1 064	161	1 069	161	1 057	144
	Max	1 074	167	1 078	170	1 060	149
	Avg	1 072	165	1 075	164	1 059	147
$f_2(x)$	Min	1 115	160	1 116	158	1 108	157
	Max	1 129	174	1 121	169	1 112	164
	Avg	1 122	172	1 118	166	1 110	160
$f_3(x)$	Min	1 071	164	1 072	169	1 066	154
	Max	1 081	179	1 080	177	1 071	163
	Avg	1 077	172	1 075	172	1 067	162

4.2 曲面拟合

将本文的算法延伸到曲面拟合问题上,以例 4、例 5 为测试函数选取双三次 B 样条曲面进行拟合数值试验。试验均将拟合区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 分别 32 等分,进行数据点的直接采样(无噪声);算法参数均设置为 $NP = 50, T_{\max} = 200$ 。取平均平方误差 MSE 为适应度函数,定义如下:

$$MS_E = \frac{1}{M_x \times M_y} \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} \{S(x_j, y_j) - f(x_j, y_j)\}^2$$

式中: $S(x, y)$ 为拟合曲面, $f(x, y)$ 为采样函数。

例 4 $f_4(x, y) = \cos(0.15 \sqrt{(80x - 40)^2 + (90y - 45)^2}) \times e^{-0.04 \sqrt{(80x - 40)^2 + (90y - 45)^2}}$

式中: $x, y \in [0, 1]$ 。该函数为带尖点的曲面。

例 5 $f_5(x, y) = \frac{1.25 + \cos(5.4y)}{6 + 6(3x - 1)^2}, x, y \in [0, 1]$ 该函数为多峰函数。

图 4 - 图 7 分别为根据例 4 和例 5 函数解析式直接用 Matlab 绘制的图形和用本文算法绘制拟合曲面

图形的对比图。由图可知,使用本文算法得到的双三次 B 样条拟合曲面几乎能准确构造出采样数据的原始图像。多次试验的数据显示,对于测试函数 4,大约迭代到第 10 ~ 20 次,平均平方误差就已达到 10^{-6} ,最终收敛到 10^{-8} ,最佳内节点个数为 8×8 。对于测试函数 5,迭代到第 10 代左右,平均平方误差达到 10^{-9} ,最终收敛到 10^{-12} ,最佳内节点个数为 5×5 。这说明本文的算法收敛速度快,拟合精度高。

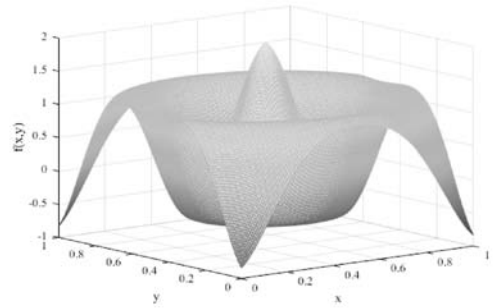


图 4 例 4 的根据函数解析式绘制的原图

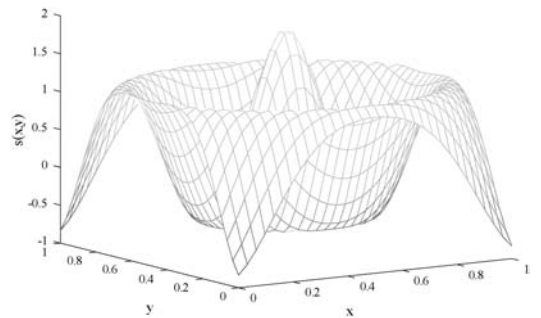


图 5 例 4 的本文算法的拟合效果图

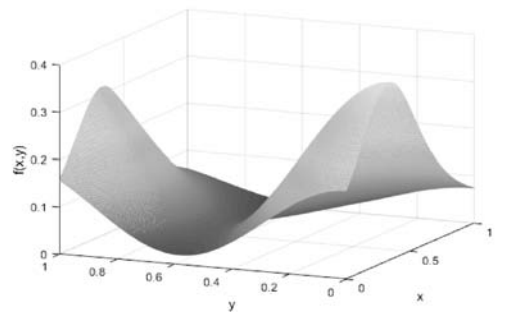


图 6 例 5 的根据函数解析式绘制的原图

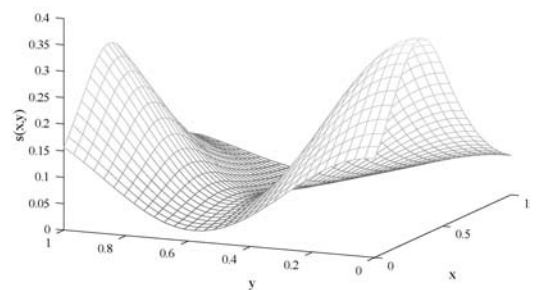


图 7 例 5 的本文算法的拟合效果图

5 结 语

本文基于差分进化算法在处理数值优化问题时所表现出的收敛速度快、求解精度高的优势,将差分进化算法进行改进,应用于B样条曲线曲面的最小二乘拟合问题。该方法选择带有随机游走的交叉操作来克服DE/current-to-best易早熟收敛的缺点;并且设计出一种带有混沌系统的局部搜索操作来跳出局部最优解。将该方法与传统的差分进化算法进行比较,试验数据以及效果图显示,该方法在处理带间断和尖点的数据时能够自适应地确定节点的位置,并且与传统的差分进化算法相比在拟合误差精度上也有显著的提高。其不足之处有两点:首先,本文方法并没有完全自适应地同时确定节点的数量与位置,这主要是受限于差分进化算法的变异操作不允许我们将节点矢量设置为变长度的个体。其次,由于B样条曲线和曲面不能精确地表示除抛物线外的二次曲线圆弧、和除抛物线面外的二次曲面,出于工业实际(特别是飞机外形的设计)精确表示二次曲线弧和二次曲面的需要,因此需要进一步研究有理B样条的曲线曲面拟合问题。鉴于此,作者将进一步研究差分进化算法的改进,解决B样条曲线曲面最小二乘拟合问题,实现节点数量和位置对不同实例的自适应调整,并研究有理B样条的曲线曲面拟合问题。

参 考 文 献

[1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京:高等教育出版社, 2013:301-336.

[2] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[3] Yoshimoto F, Harada T, Yoshimoto Y. Data fitting with a spline using a real-coded genetic algorithm[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(8):751-760.

[4] 周明华,汪国昭. 基于遗传算法的B样条曲线和Bezier曲线的最小二乘拟合[J]. 计算机研究与发展, 2005, 42(1):135-143.

[5] 穆国旺,臧婷,赵罡. 用改进遗传算法确定B样条曲线的节点矢量[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(1):88-90.

[6] Adi D I S, Shamsuddin S M, Ali A. Particle Swarm Optimization for NURBS Curve Fitting[C]// Sixth International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization. IEEE Computer Society, 2009:259-263.

[7] Gálvez A, Iglesias A. Efficient particle swarm optimization approach for datafitting with free knot B-splines[J]. Com-

puter-Aided Design, 2011, 43(12):1683-1692.

[8] ilker E, Arslan A. Automatic knot adjustment using an artificial immune system for B-spline curve approximation[J]. Information Sciences, 2009, 179:1483-1494.

[9] Zhao X, Zhang C, Yang B, et al. Adaptive knot placement using a GMM-based continuous optimization algorithm in B-spline curve approximation[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43:598-604.

[10] 何兵朋,冯仁忠,余胜蛟. 基于差分进化算法的B样条曲线曲面拟合[J]. 图学学报, 2016, 37(2):178-183.

[11] Trejo-Caballero G, Rostro H, Garcia-Capulin C H, et al. Automatic Curve Fitting Based on Radial Basis Functions and a Hierarchical Genetic Algorithm[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(731207).

[12] Han X, Quan L, Xiong X, et al. Diversity enhanced and local search accelerated gravitational search algorithm for data fitting with B-splines[J]. Engineering with Computers, 2015, 31(2):215-236.

[13] Vesterstrom J, Thomsen R. A comparative study of differential evolution, particle swarm optimization, and evolutionary algorithms on numerical benchmark problems[C]// Evolutionary Computation, 2004. CEC2004. Congress on. IEEE, 2004:1980-1987.

[14] Storn R, Price K. Differential evolution: a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. Kluwer Academic Publishers, 1997, 11(4):341-359.

[15] Storn R, Price K. Differential evolution: a fast and simple numerical optimizer[C]//1996 Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society. New York, 1996:524-527.

[16] Tanabe R, Fukunaga A. Success-history based parameter adaptation for differential evolution[C]// IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2013:71-78.

[17] Das S, Abraham A, Chakraborty U K, et al. Differential evolution using a neighborhood-based mutation operator[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(3):526-553.

[18] Cui L, Li G, Lin Q, et al. Adaptive Differential Evolution Algorithm with Novel Mutation Strategies in Multiple Subpopulations[J]. Computers & Operations Research, 2015, 67:155-173.

[19] Zhan Z H, Zhang J. Enhance Differential Evolution with Random Walk[C]// Conference Companion on Genetic & Evolutionary Computation, 2012:1513-1514.

[20] Li G H, Lin Q Z, Cui L Z, et al. A novel hybrid differential evolution algorithm with modified CoDE and JADE[J]. Applied Soft Computing, 2016, 47:577-599.

信方,无需第三方介入协议,在提高协议安全性的同时亦减少了协议的复杂性。W态的较强鲁棒性使得粒子在有粒子损失的情况下能够保持较好的纠缠特性。协议无需通信双方事先拥有相同的密钥,使协议易于实现和应用。另外,协议的粒子利用率远远高于25%,较之前的协议有明显提升。

在粒子利用率方面,协议的参与方 Bess 的粒子均参与了密钥的生成,利用率是100%。由于在W态中,测量的粒子状态为 $|0\rangle$ 才会使其他粒子继续处于纠缠态中,以进行密钥的生成:用X基检测四粒子W态中的粒子,结果为 $|0\rangle$ 的概率为75%;在三粒子W态中粒子塌缩到 $|0\rangle$ 的概率为66.7%。因此理论上协议发起方 Alex 平均两个四粒子W态得到一比特密钥。但协议还需在信道检测阶段用Z基测量部分粒子,这部分不会参与最后密钥的生成,因此实际的粒子利用率略低于50%,但却要高于先前的25%。

4 结 语

本文基于鲁棒性较强的量子的四粒子W态,将信道检测以及密钥生成两部分融合到一个量子态中去,在区分开粒子的同时又在传输中把它们混合在一起,有着较好的防窃听效果。而Bell测量则可使通信双方生成一致的密钥。此外,粒子的利用率较先前协议有了明显提高,不会造成粒子成本的过度浪费。通过安全性的分析证明,该协议能够有效地抵抗Eve的窃取攻击,即Eve不会在通信双方毫无察觉的情况下获取密钥。接下来将进行提高粒子利用率的研究,使粒子利用率进一步提高。

参 考 文 献

[1] 李培培,谭晓青. 基于可重用的不对称三粒子纠缠态的量子秘密共享[J]. 计算机应用研究, 2016, 33(4): 1120-1123.

[2] 雷奇,尚涛,刘建伟. 基于随机预言模型的量子仲裁签名方案安全性分析[J]. 密码学报, 2016(6): 619-628.

[3] 崔明路,王治强,刘薇. 一种星地量子密钥通信仿真平台[J]. 中国科学院大学学报, 2011, 28(2): 241-245.

[4] Russell J. Application of quantum key distribution [C]// Military Communications Conference, 2008. Milcom. IEEE, 2008: 1-6.

[5] Broadbent A, Schaffner C. Quantum cryptography beyond quantum key distribution[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2016, 78(1): 351-382.

[6] Pljonkin A, Romyantsev K. Quantum-cryptographic network [C]// East-West Design & Test Symposium. IEEE, 2017:

1-4.

[7] Lo H K, Curty M, Tamaki K. Secure quantum key distribution[J]. Nature Photonics, 2014, 8(8): 595-604.

[8] 周南润,宋汉冲,龚黎华,等. 基于GHZ态的三方量子确定性密钥分配协议[J]. 物理学报, 2012, 61(21): 214203-214203.

[9] 杨新元,马智,吕欣. 基于W态的量子安全直接通信协议[J]. 计算机科学, 2009, 36(10): 68-71.

[10] 胡杏,郁季军,宁小玲,等. 基于三粒子W态的身份认证[J]. 光学学报, 2009, 29(6): 1680-1683.

[11] Cabello A. Erratum: Bell's theorem with and without inequalities for the three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger and W, states [Phys. Rev. A 65, 032108 (2002)][J]. Physical Review A, 2012, 85(2): 93-95.

[12] 杨宇光,温巧燕,朱甫臣. 基于W态的量子密钥分配和秘密共享[J]. 北京邮电大学学报, 2006, 29(3): 40-43.

[13] 陶原,潘炜,罗斌,等. 基于W态的网络中任意两个用户间量子密钥分配方案[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(11): 2588-2591.

[14] 曹博,张盛,王剑. 网络中任意两用户量子密钥分配协议 [C]// Asia-Pacific Conference on Information Theory. 2010.

[15] 刘林曜,胡孟军,吕洪君,等. 基于任意Bell态的量子密钥分配[J]. 量子电子学报, 2013, 30(4): 439-444.

(上接第281页)

[21] Liu G, Xiong C Q, Guo Z L. Enhanced differential evolution using random-based sampling and neighborhood mutation [J]. Soft Computing, 2015, 19: 2173-2192.

[22] Cai Y, Zhao M, Liao J. Neighborhood guided differential evolution[J]. Soft Computing, 2016: 1-44.

[23] Schwarz G E. Estimating the dimension of a model[J]. Annals of Statistics, 1978, 6(2): 461-464.

(上接第293页)

[19] 朱延万,赵拥军,孙兵. 一种改进的稀疏度自适应匹配追踪算法[J]. 信号处理, 2012, 28(1): 80-86.

[20] 王妮娜,桂冠,苏冰涛,等. 基于压缩感知的MIMO-OFDM系统稀疏信道估计方法[J]. 电子科技大学学报, 2013, 42(1): 59-62.

[21] 赵龙慧,潘乐炳,李宝清. OFDM稀疏信道估计中改进的OMP算法[J]. 计算机工程与设计, 2015, 36(7): 1701-1705.

[22] 高西全,丁玉美. 数字信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2008: 84-87.

[23] 杨盼. 压缩感知中改进的匹配追踪类算法研究[D]. 安徽:安徽大学, 2015.