

# 基于近似 $l_0$ 范数的实数化 DOA 估计

吉爱国 刘伟平 刘志强

(青岛理工大学信息与控制工程学院 山东 青岛 266520)

**摘要** 针对利用压缩感知进行波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计时求解  $l_0$  范数 NP 难、噪声敏感等问题,提出一种基于近似  $l_0$  范数的实数化 DOA 估计算法(ALO-DOA)。对阵列接收数据的协方差矩阵进行 Khatri-Rao(KR)积变换,将阵列多测量矢量模型转换为虚拟阵列单测量矢量模型,并通过降维和实数化进一步降低计算量,同时抑制噪声,提高 DOA 估计的准确性。利用信源在空间的稀疏性构造冗余字典,引入平滑函数来近似  $l_0$  范数,将无法直接求解  $l_0$  范数问题转化为平滑函数的最优化问题,可通过修正牛顿算法快速求解。仿真结果表明该算法计算快,精度较高,可对 DOA 进行有效估计。

**关键词** 波达方向估计 近似  $l_0$  范数 实数化 Khatri-Rao 积 压缩感知

中图分类号 TP391

文献标志码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2020.11.053

## REAL-VALUED DOA ESTIMATION BASED ON APPROXIMATE $l_0$ NORM

Ji Aiguo Liu Weiping Liu Zhiqiang

(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, Shandong, China)

**Abstract** In order to solve the problem that  $l_0$  norm is NP-hard and noise-sensitive when using compressed sensing to estimate direction of arrival (DOA), a real-valued DOA estimation algorithm using approximate  $l_0$  norm (ALO-DOA) is proposed. Khatri-Rao (KR) product transformation was applied to the covariance matrix of the received data, and the array multiple measurement vector model was converted into a virtual array single measurement vector model. Dimensionality reduction and realization were used to reduce the computational complexity, suppress noise and improve the accuracy of DOA estimation. Redundant dictionary was constructed by the sparseness of sources in spatial. The smoothing function was introduced to approximate  $l_0$  norm, which could not directly solve the  $l_0$  norm problem into the optimization problem of smoothing function, which could be solved quickly by modified Newton algorithm. The simulation results show that the proposed algorithm is fast in calculation and high in accuracy, and can effectively estimate DOA.

**Keywords** Direction of arrival estimation Approximate  $l_0$  norm Real-value Khatri-Rao product Compressed sensing

## 0 引言

波达方向估计作为阵列信号处理的重要研究内容,在雷达、射电天文、声呐、测向等领域起着重要的作用<sup>[1]</sup>。常见的 DOA 估计方法可分为三类<sup>[2-4]</sup>:波束形成法(Beam Forming, BF),子空间法和最大似然法(Maximum Likelihood, ML)。常规波束形成法计算速度快,但存在“瑞利限”,其估计性能受到阵列孔径的约束。最小方差无畸变响应(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)算法提高了估计分辨率,但

在低信噪比下估计效果较差<sup>[2]</sup>。最大似然法估计性能较好,但其估计过程中需要非线性多维搜索,计算量较大<sup>[4]</sup>。以多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法为代表的子空间类算法,利用信号子空间和噪声子空间的正交性来构造空间谱函数,通过谱峰搜索来检测信号的 DOA,具有较高的分辨率,但在低信噪比和快拍数较少时性能会下降<sup>[3]</sup>。

压缩感知理论为 DOA 估计问题带来了新的解决方法,使得利用少量快拍数据进行 DOA 估计有了可能。对信源所在的空间进行网格划分,使信源个数远小于网格数,便可使用压缩感知中的稀疏重构方法进

行 DOA 估计。压缩感知恢复过程的本质是求解  $l_0$  范数(即非零元素的个数),但是求解  $l_0$  范数 NP 难,因此 Chen 等<sup>[5]</sup>提出基追踪(Basis Pursuit, BP)算法,利用  $l_1$  范数代替  $l_0$  范数进行稀疏重构。Malioutov 等<sup>[6]</sup>将  $l_1$  范数用于 DOA 估计中,提出  $l_1$ -SVD 算法,先对阵列接收的数据矩阵进行奇异值分解,再通过求解二阶锥规划问题进行 DOA 估计,然而该算法容易出现伪峰,影响估计性能。韩树楠等<sup>[7]</sup>提出了一种加权  $l_1$ -SVD 方法,利用接收数据傅里叶变换后的空间谱来获取权值,解决了  $l_1$ -SVD 算法的伪峰问题,但该算法稳定性较差,需要多次采样进行平滑处理。蔡晶晶等<sup>[8]</sup>将 Khatri-Rao(KR)积理论、空域平滑理论和压缩感知理论相结合,实现了相干信号的 DOA 估计。

利用  $l_1$  范数求解稀疏重构反问题精度高,但是计算量较大。近年来,一些学者提出使用光滑函数逼近  $l_0$  范数,将其转化为最优化问题并通过迭代算法求解,提高了计算速度<sup>[9-13]</sup>。Mohimani 等<sup>[9]</sup>提出  $SL_0$  算法,采用带参数的高斯函数来逼近  $l_0$  范数,将求解  $l_0$  范数转化为光滑函数的最值问题,重建速度比基追踪算法快 2~3 倍。赵瑞珍等<sup>[10]</sup>提出  $NSL_0$  算法,使用双曲正切函数逼近  $l_0$  范数,选用修正牛顿方法求解最优化问题,提高了运算效率。孙娜等<sup>[11]</sup>利用最速下降法和拟牛顿法进行稀疏重构,用 BFGS 公式计算 Hesse 矩阵的近似值,使得重构精度和峰值信噪比等得到了提高。

然而上述近似  $l_0$  范数算法仅能用于单快拍、无噪、实数情况下的稀疏重构问题,本文提出了一种基于近似  $l_0$  范数的实数化 DOA 估计算法(AL0-DOA),使得近似  $l_0$  范数算法可用于多快拍、存在噪声、复数运算的 DOA 估计中。先利用 Khatri-Rao(KR)积变换,将阵列多测量矢量模型转换为虚拟阵列单测量矢量模型,再通过降维和实数化进一步降低计算量,同时抑制了噪声,最后引入平滑函数来近似  $l_0$  范数,通过修正牛顿算法求解最优化问题得到 DOA 的估计值。仿真结果表明本文算法计算快,精度较高,可对 DOA 进行有效估计。

## 1 阵列信号模型

考虑一  $M$  元各向同性的等距阵(Uniform Linear Array, ULA),阵元间距  $d$  为  $\lambda/2$ ,  $\lambda$  是信号波长。假设  $K$  个远场窄带信号源以平面波入射到线阵上,信源方向分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ ,建立如图 1 所示的阵列模型。

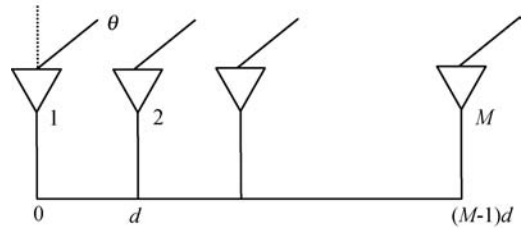


图 1 阵列信号 DOA 估计模型

第  $t$  次快拍时,阵列接收到的信号为:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  为  $M$  个阵元的输出;  $\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}(\theta_1), \boldsymbol{\alpha}(\theta_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}(\theta_K)]$  为阵列流型矩阵;  $\boldsymbol{\alpha}(\theta_i) = [1, e^{-j\omega_i}, e^{-2j\omega_i}, \dots, e^{-j(M-1)\omega_i}]^T$  为导向向量,  $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\omega_i = 2\pi \frac{d \sin \theta_i}{\lambda}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ ;  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$  为空间信号;  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  为  $M \times 1$  维噪声矩阵,  $n_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) 是与信号源不相关的零均值白噪声。

信号  $\mathbf{X}(t)$  的协方差矩阵  $\mathbf{R}$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]\mathbf{A}^H + E[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{R}_s$  为信号的协方差矩阵;  $\mathbf{I} = E[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)] = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2)$  为噪声的协方差矩阵。

## 2 KR 积虚拟阵列模型

### 2.1 KR 积变换

对于两个矩阵  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k] \in \mathbf{C}^{n \times k}$  和  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k] \in \mathbf{C}^{m \times k}$ , 其 KR 积定义为:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_k] \in \mathbf{C}^{nm \times k} \quad (3)$$

式中:“ $\odot$ ”和“ $\otimes$ ”分别表示 KR 积和 Kronecker 积。对于两个向量  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  和  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ , 其 Kronecker 积可以表示为:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n \mathbf{b}]^T = \text{vec}(\mathbf{b}\mathbf{a}^T) \quad (4)$$

假设空间信号之间互不相干,则式(2)中的  $\mathbf{R}_s$  为对角阵,即  $\mathbf{R}_s = \text{diag}(\mathbf{p})$ , 其中  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_K]^T$ , 矢量化式(2)可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\stackrel{\Delta}{=} \text{vec}(\mathbf{R}) = \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H) + \text{vec}(\mathbf{I}) = \\ &= (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\mathbf{p} + \text{vec}(\mathbf{I}) \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $(\cdot)^*$  表示矩阵的共轭。比较式(5)与式(1),可以发现式(5)中  $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$  为新的  $M^2 \times K$  维阵列流型矩阵,称其为虚拟阵列流型矩阵,  $\mathbf{y}$  对应虚拟阵元,  $\mathbf{p}$  对应虚拟信源。因此通过 KR 积变换,将阵列多测量矢量(Multiple Measurement Vectors, MMV)模型转换为虚拟



存在噪声时,有:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(x_i) = \begin{cases} 0 & |x_i| \ll \sigma \\ 1 & |x_i| \gg \sigma \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{令 } F_{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\bar{N}} f_{\sigma}(x_i), \text{ 则式(13) 可通过式(18)}$$

近似。

$$\begin{aligned} \min & F_{\sigma}(\mathbf{x}) \\ \text{s. t. } & \tilde{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

当  $\sigma$  的取值很小时,函数  $F_{\sigma}(x)$  存在很多局部最小值点,很难求出其全局最优解; $\sigma$  的取值越大,函数  $F_{\sigma}(\mathbf{x})$  越光滑,越不能精确估计  $l_0$  范数。所以选择一个递减的序列  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ , 对  $\sigma$  的每一个取值,求函数  $F_{\sigma}(\mathbf{x})$  的最优值,直到  $\sigma$  足够小,避免陷入函数  $F_{\sigma}(\mathbf{x})$  的局部最小值。

本文使用修正牛顿法求解式(18)的问题<sup>[10]</sup>。首先计算  $F_{\sigma}(\mathbf{x})$  的牛顿方向  $\mathbf{d} = -\nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{x})^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{x})$ 。

$$\nabla F_{\sigma}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f_{\sigma}(x_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_{\sigma}(x_2)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_{\sigma}(x_{\bar{N}})}{\partial x_{\bar{N}}} \right]^T =$$

$$\left[ \frac{\frac{4x_1}{\sigma^2}}{\left( e^{\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \right)^2}, \dots, \frac{\frac{4x_{\bar{N}}}{\sigma^2}}{\left( e^{\frac{x_{\bar{N}}^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{x_{\bar{N}}^2}{2\sigma^2}} \right)^2} \right]^T \quad (19)$$

$$\nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{x}) = \text{diag} \left[ \frac{\partial^2 f_{\sigma}(x_1)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 f_{\sigma}(x_{\bar{N}})}{\partial x_{\bar{N}}^2} \right]^T \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 f_{\sigma}(x_k)}{\partial x_k^2} = \frac{4}{\sigma^2} \left[ \left( 1 + \frac{2x_k^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} + \left( 1 - \frac{2x_k^2}{\sigma^2} \right) e^{\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (21)$$

由于牛顿方向中的 Hesse 矩阵(即  $\nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{x})$ )并非正定矩阵,无法保证牛顿方向为下降方向,故需对其进行修正,构造一个新矩阵  $\mathbf{G} = \nabla^2 F_{\sigma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_k \mathbf{I}$ , 其中:  $\varepsilon_k$  是一个合适的正数,  $\mathbf{I}$  是单位矩阵。取:

$$\varepsilon_k = \frac{4}{\sigma^2} \left( \frac{3x_k^2}{\sigma^2} e^{\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} - \frac{x_k^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} \right) / \left( e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} + e^{\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} \right)^3 \quad (22)$$

修正后  $\mathbf{G}$  矩阵对角线上的元素为  $\varepsilon_k = \frac{4}{\sigma^2} \times \left( 1 + \frac{x_k^2}{\sigma^2} \right) / \left( e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} + e^{\frac{x_k^2}{2\sigma^2}} \right)^2$ , 符合正定矩阵的条件,最终修正的牛顿方向

$$\text{为 } \mathbf{d} = -\mathbf{G}^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{x}) = \left[ -\frac{\sigma^2 x_1}{\sigma^2 + x_1^2}, -\frac{\sigma^2 x_2}{\sigma^2 + x_2^2}, \dots, -\frac{\sigma^2 x_{\bar{N}}}{\sigma^2 + x_{\bar{N}}^2} \right]^T。$$

综上所述,使用 AL0-DOA 算法进行 DOA 估计的步骤如下:

(1) 计算数据的协方差矩阵的估计值,并矢量化。

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^H(t)$$

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{R})$$

(2) 对  $\mathbf{y}$  进行降维、实数化和去噪。

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{G}^T \mathbf{y} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{B} \mathbf{p} + \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{G}^T \text{vec}(\mathbf{I})$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{p} = \mathbf{W}^{1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_I \end{bmatrix} \mathbf{p}$$

(3) 使用迭代算法求解 DOA 估计问题。

初始值  $\mathbf{x} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}$ , 选择一组  $\sigma, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J]$ 。

For  $j=1, 2, \dots, J$

$\sigma = \sigma_j$

For  $l=1, 2, 3, 4, 5$

计算修正牛顿方向  $\mathbf{d} = -\mathbf{G}^{-1} \nabla F_{\sigma}(\mathbf{x})$

修正牛顿法  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{d}$

梯度投影  $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - \Phi \mathbf{x})$

end

$\sigma = \rho \sigma_j$

end

## 4 仿真实验

使用均匀直线阵列,阵元间距为半波长,信源为随机高斯信号,噪声为均值为零的高斯白噪声,将空间角度从  $-90^\circ$  至  $90^\circ$  以  $1^\circ$  为间隔均匀划分为 181 个网格。AL0-DOA 算法中  $\sigma$  的初始值为 2,  $\sigma$  的终止值为  $10^{-4}$ ,  $\sigma$  的减少步长  $\rho$  为 0.7。均方误差 (RMSE) 定义为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MK} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2} \quad (23)$$

式中:  $M$  为蒙特卡洛仿真实验次数;  $K$  为信源个数;  $\hat{\theta}_k$  为第  $m$  次蒙特卡洛实验时得到的 DOA 估计值;  $\theta_k$  为 DOA 的真实值。

假设有 3 个非相干窄带信源,其入射角度为  $[-50^\circ, 0^\circ, 55^\circ]$ , 阵元个数为 12, 快拍数  $N = 500$ , 信噪比 SNR 从  $-6 \sim 6$  dB 以 2 dB 为间隔, 每个信噪比下进行 500 次蒙特卡洛实验。图 2 和图 3 分别为 KR-SLO、KR-L1 和 AL0-DOA 算法的 DOA 估计均方误差 RMSE 和成功率随 SNR 的变化曲线。可以看出,随着信噪比的增加,几种算法的均方误差都逐渐减小,估计成功率逐渐增加。本文提出的 AL0-DOA 算法的 RMSE 始终比 KR-SLO 和 KR-L1 算法低, DOA 估计成功率始终比 KR-SLO 和 KR-L1 算法高。信噪比为  $-2$  dB 时,本文算法估计成功率达到 90% 以上; 信噪比大于 2 dB 时,其估计误差为 0, 与其他算法相比,本文算法在低信噪比下的表现更好。

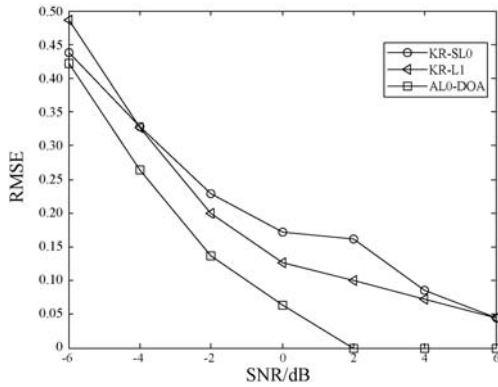


图2 RMSE 随 SNR 的变化

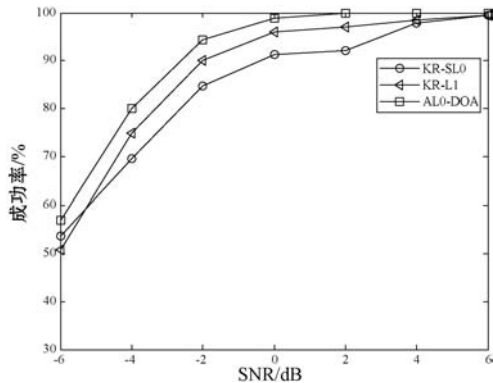
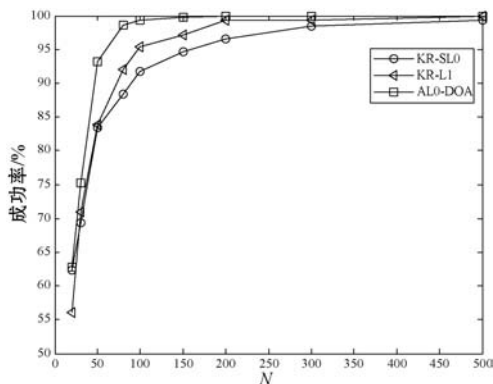


图3 DOA 估计成功率随 SNR 的变化

假设有 4 个非相干窄带信号,其入射角度为  $[-50^\circ, -20^\circ, 20^\circ, 55^\circ]$ ,阵元个数为 12,信噪比 SNR 为 15 dB。图 4 为 KR-SL0、KR-L1 和 AL0-DOA 算法的 DOA 估计成功率随快拍数  $N$  的变化曲线。可以看出,随着快拍数的增加,几种算法的估计成功率逐渐增加。本文算法 DOA 估计成功率始终比 KR-SL0 和 KR-L1 算法高,在快拍数为 50 时,估计成功率达到了 90% 以上,说明本文算法可以在更少的快拍数下取得更优的估计性能。

图4 DOA 估计成功率随  $N$  的变化

假设有 3 个非相干窄带信号,其入射角度为  $[-50^\circ, 0^\circ, 55^\circ]$ ,阵元个数为 12,快拍数  $N = 500$ ,信噪比 SNR 为 15 dB。对 KR-SL0、KR-L1、L1-SVD 和 AL0-DOA 每种算法进行 10 次实验,CPU 主频为 3.2 GHz,仿真软件为 MATLAB 2014a。表 1 为每种算法 10 次实验的总运算时间。结合上述实验结果分析

表中数据可以发现:L1-SVD 算法需要求解二阶锥规划问题,因而所需时间最长;KR-SL0 算法计算时间最短,但是其估计性能较差;KR-L1 算法运行时间较长,而且其估计性能一般;本文算法具有运算时间短,估计性能高的优点。

表 1 不同算法计算时间的比较

算法	时间/s	算法	时间/s
KR-SL0	0.019 5	L1-SVD	41.241 9
KR-L1	4.260 6	AL0-DOA	0.040 9

## 5 结 语

本文提出了一种基于近似  $l_0$  范数的实数化 DOA 估计算法,将无法直接求解  $l_0$  范数的问题转化为平滑函数的最优化问题,并将其用于 DOA 估计中,通过修正牛顿算法快速求解,解决了 DOA 估计中的多快拍、含噪、复数运算的问题。利用 KR 积理论对数据协方差矩阵进行变换,将阵列多测量矢量模型转换为虚拟阵列单测量矢量模型。降维和实数化过程进一步降低了运算量,去噪过程提高了算法的鲁棒性。仿真结果表明,本文算法可对 DOA 进行有效估计,克服了  $l_1$  范数计算量大的问题,保留了  $l_0$  范数运算快的优点。

## 参 考 文 献

- [1] Trees H L V. Optimum array processing: part IV of detection, estimation, and modulation theory [M]. New York: Wiley Interscience, 2002.
- [2] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis [J]. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8): 1408 - 1418.
- [3] Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276 - 280.
- [4] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67 - 94.
- [5] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. Siam Review, 2001, 43(1): 129 - 159.
- [6] Malioutov D, Cetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3010 - 3022.
- [7] 韩树楠,李东生,张浩,等. 基于加权  $l_1$  范数的稀疏重构波达方向估计算法 [J]. 探测与控制学报, 2015(2): 82

-85.

- [ 8 ] 蔡晶晶,宗汝,蔡辉. 基于空域平滑稀疏重构的 DOA 估计算法[J]. 电子与信息学报,2016,38(1):168-173.
- [ 9 ] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $l_0$  norm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2009,57(1):289-301.
- [10] 赵瑞珍,林婉娟,李浩,等. 基于光滑  $l_0$  范数和修正牛顿法的压缩感知重建算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2012,24(4):478-484.
- [11] 孙娜,刘继文,肖东亮. 基于 BFGS 拟牛顿法的压缩感知 SLO 重构算法[J]. 电子与信息学报,2018,40(10):2408-2414.
- [12] 伍飞云,周跃海,童峰. 基于似零范数和混合优化的压缩感知信号快速重构算法[J]. 自动化学报,2014,40(10):2145-2150.
- [13] 陈金立,李伟,朱筱嵘,等. 基于修正近似双曲正切函数的平滑  $l_0$  范数算法[J]. 计算机工程与设计,2018,39(12):3717-3721,3754.
- [14] Ma W K, Hsieh T H, Chi C Y. DOA estimation of quasi-Stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: a Khatri-Rao subspace approach [J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2010,58(4):2168-2180.

---

### (上接第 285 页)

- [21] 陈湘川. 信息缺乏网络中的通信算法研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2000.
- [22] 肖琳琳,陈杰,马冬妍,等. 中国工业企业两化融合现状实证研究[J]. 中国科技论坛,2016(9):71-77.
- [23] 曾文献,张淑青,孟庆林,等. 基于改进 BP 神经网络的网络入侵检测研究[J]. 石家庄学院学报,2019,21(3):23-30.
- [24] 逮玉婧. 基于深度信念网络的入侵检测算法研究[D]. 石家庄:河北师范大学,2016.
- [25] 王明. 基于卷积神经网络的网络入侵检测系统[D]. 北京:北京邮电大学,2018.
- [26] 陈万志,李东哲. 结合白名单过滤和神经网络的工业控制网络入侵检测方法[J]. 计算机应用,2018,38(2):363-369.

---

### (上接第 303 页)

- [ 9 ] 秦靖辉. 安全电子商务 SET 协议的研究与改进[D]. 广州:广东工业大学,2016.
- [10] 韩炼冰. 椭圆曲线密码算法的 FPGA 设计与实现[D]. 成都:电子科技大学,2018.
- [11] Kavitha S, Alphonse P J A, Reddy Y V. An improved authentication and security on efficient generalized group key agreement using hyper elliptic curve based public key cryp-

tography for IoT health care system[J]. Journal of medical systems,2019,43(8):260.

- [12] 卢闻捷. 改进椭圆曲线密码体制在 SET 协议中的应用[J]. 计算机系统应用,2018,27(4):34-38.
- [13] 李尚泽. 椭圆曲线标量乘算法改进及应用[D]. 北京:北京化工大学,2017.
- [14] Kumar V, Ahmad M, Kumari A. A secure elliptic curve cryptography based mutual authentication protocol for cloud-assisted TMIS[J]. Telematics and Informatics, 2019, 38:100-117.
- [15] 吴旦. 椭圆曲线加密算法在卫星通信中的应用[J]. 数字通信世界,2018,165(9):160.
- [16] Toughi S, Fathi M H, Sekhavat Y A. An image encryption scheme based on elliptic curve pseudo random and Advanced Encryption System[J]. Signal Processing,2017,141(12):217-227.
- [17] Beelen P, Datta M. Generalized hamming weights of affine cartesian codes[J]. Finite Fields and Their Applications, 2018,51(5):130-145.
- [18] 王子青. 移动支付系统加密认证算法及安全协议的研究与实现[D]. 南京:南京邮电大学,2016.
- [19] 魏娟. SET 加密技术在 B2C 电子商务中的应用研究[J]. 赤峰学院学报(自然科学版),2017,33(5):109-110.
- [20] Mehta E, Solanki A. Minimization of mean square error for improved euler elliptic curve secure hash cryptography for textual data[J]. Journal of Information and Optimization Sciences,2017,38(6):813-826.
- [21] 魏南强. 基于 SET 协议的电子商务安全问题[J]. 山东工业技术,2017(4):137.

---

### (上接第 315 页)

- [15] Liu R, Chen P Y, Peng X, et al. X-Point PUF: Exploiting sneak paths for a strong physical unclonable function design [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers,2018,65(10):3459-3468.
- [16] Liu W Q, Zhang L, Zhang Z R, et al. XOR-based low-cost reconfigurable PUFs for IoT security[J]. ACM Transactions on Embedded Computing Systems,2019,18(3):25.

---

### (上接第 327 页)

- [ 6 ] 李校南,王雪瑞,戴紫彬,等. 可重构分簇式分组密码处理架构[J]. 计算机应用与软件,2014,31(1):315-318,326.
- [ 7 ] 陈侨川. 一种基于 DES 和 RSA 算法的混合加密算法[D]. 昆明:云南大学,2015.
- [ 8 ] 陈运启,张翼. 煤矿瓦斯监控系统关键数据加密算法的研究与实现[J]. 工矿自动化,2012(7):7-10.
- [ 9 ] 马汝超,赵亮. 煤矿安全监控系统数据加密技术[J]. 工矿自动化,2017,43(2):15-18.