

基于 SVD 分解的二阶离散时变线性系统稳定性分析

付波 张行星 范秀香 赵熙临 何莉

(湖北工业大学太阳能高效利用及储能运行控制湖北省重点实验室 湖北 武汉 430068)

摘要 连续系统的稳定性判据已经不适用于二阶离散时变线性系统,但目前仍未有较简便的稳定性判定方法。通过研究矩函数的三项递归式,并利用矩阵 SVD 分解将三项递归式所构成的二阶离散线性时变系统的状态方程转变为由一个旋转矩阵和一个对角矩阵构造的等效系统。根据李雅普诺夫理论得到几个二阶离散时变线性系统的稳定性判据和不稳定性判据。实验结果与所提出的判据相符合,验证了该判据的有效性。

关键词 二阶离散时变线性系统 数值稳定性 SVD 分解 三项递归公式

中图分类号 TP311.52

文献标志码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2020.12.007

STABILITY ANALYSIS OF SECOND ORDER DISCRETE TIME-VARYING LINEAR SYSTEM BASED ON SVD DECOMPOSITION

Fu Bo Zhang Xingxing Fan Xiuxiang Zhao Xilin He Li

(Hubei Key Laboratory for High-efficiency Utilization of Solar Energy and Operation Control of Energy Storage System, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, Hubei, China)

Abstract The stability criterion of continuous systems is not available to second order discrete time-varying linear system, but there is still no simple method for stability determination. This paper studies the three-term recursion of moment function, and uses the matrix SVD decomposition to transform the state equation of the second order discrete time-varying linear system into an equivalent system constructed by a rotation matrix and a diagonal matrix. According to Lyapunov theory, we obtain the stability criterion and instability criterion of second order discrete time-varying linear systems. The experimental results are consistent with the proposed criteria, which verify the effectiveness of the proposed criteria.

Keywords Second order discrete time-varying linear system Numerical stability SVD decomposition Three-phase recursion

0 引言

离散线性时不变系统的渐进稳定性可以通过判定系统状态矩阵的特征值是否位于复平面单位圆内来判断^[1],但是时不变系统的稳定性判据并不适用于离散时变线性系统。冻结法利用线性时不变系统的稳定性判据判断特定条件下线性时变系统的稳定性,但其理论不够严密。

控制系统可以分为离散线性系统和连续线性系

统,连续系统的研究相对于离散系统更为完善,但离散系统也起重要作用,很多离散系统可通过连续系统离散化得到,目前已有 Euler、Runge-Kutta 等离散化方法^[2-3]。但连续系统离散化得到的离散系统是否具有原连续系统的稳定性相关性质,依旧是需要继续研究的问题。控制系统稳定性判断^[4]方法通常分为两类,一类主要研究系统方程需要满足的条件,另一类是寻求李雅普诺夫函数。对于离散线性系统的研究^[5],主要集中在差分方程和微分方程的改造。

齐春子等^[6]研究了多变量全系数黄金分割反馈控

制系统的稳定性问题,得到了此类闭环系统时变参数变化速度的约束条件。张振国等^[7]通过构造 L 函数,分析了二阶离散时变线性系稳定性的充分条件。关铁峰等^[8-9]基于李雅普诺夫理论,提出了离散时变线性系统的充分条件。

本文在这些研究的基础上,对线性离散时变系统的经典状态矩阵做 SVD 分解,从而得到新的等效状态方程,从李雅普诺夫定理的思路进行思考,经过推导和验证,得到了两个判定线性离散时变系统的稳定性判据和两个不稳定判据。

1 二阶离散时变线性系统及其稳定性

1.1 正交多项式三相递归式稳定性分析

若 $f(x), g(x) \in C[a, b], \rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的权函数,且:

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad (1)$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交。只要给定 $[a, b]$ 上的权函数 $\rho(x)$, 由 $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ 利用逐个正交化手续得到正价多项式序列:

$$\rho_0(x) = 0 \quad \rho_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \rho_j)}{(\rho_j, \rho_j)} \rho_j \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

并且满足递推关系:

$$\rho_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) \rho_n(x) - \beta_n \rho_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

其中:

$$\rho_0(x) = 1 \quad \rho_{-1}(x) = 0 \quad (4)$$

式中: $(x - \alpha_n)$ 和 β_n 为递归式的系数。

把式(3)的阶数 n 作为一个离散变量进行思考,则式(3)便可以看成一个离散时变线性系统进行分析。

1.2 李雅普诺夫稳定性定理

定义 1 若系统 $\dot{x} = f(x, t)$ 对于任意选定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ (球域半径), 使得当 $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(t = t_0)$ 时, 恒有 $\|x - x_e\| \leq \varepsilon(t_0 \leq t \leq \infty)$, 则称系统的平衡状态在李雅普诺夫意义下是稳定的。

定义 1 说明, 对于每一个球域 $S(\varepsilon)$, 若存在一个球域 $S(\delta)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 从 $S(\delta)$ 球域出发的轨迹不离开 $S(\varepsilon)$ 球域, 则系统的平衡状态在李雅普诺夫意义下是稳定的, 如图 1(a) 所示。

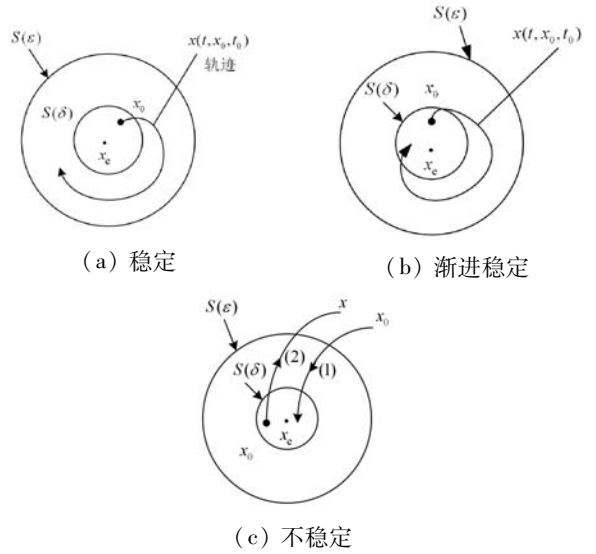


图 1 李雅普诺夫稳定性

定义 2 如果平衡状态 x_e 在李雅普诺夫意义下是稳定的, 即从 $S(\delta)$ 球域出发的每一条运动轨迹 $x(t, x_0, t_0)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 都不离开 $S(\varepsilon)$ 球域, 且最后都能收敛到 x_e 附近, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$, 则称系统的平衡状态 x_e 是渐进稳定的。

渐进稳定性是个局部稳定的概念, 图 1(b) 中的球域 $S(\delta)$ 是渐进稳定的范围。

定义 3 如果从 $S(\delta)$ 球域出发的轨迹, 无论 $S(\delta)$ 球域选得多么小, 至少有一条轨迹脱离 $S(\varepsilon)$ 球域, 则称平衡状态 x_e 为不稳定的。如图 1(c) 中的轨迹曲线 (2) 所示。

1.3 SVD 稳定性分析

定义二阶离散线性时变系统:

$$X(k) = G(k)X(k-1) \quad (5)$$

式中: 2×2 状态矩阵 $G(k) \in C^{2 \times 2}, \text{rank } G(k) = 2(2 > 0)$ 。一般采用李雅普诺夫第二法分析系统的稳定性, 但是李雅普诺夫函数不易构造。即使构造出该函数, 在判定能量增量正定性 (或负定性) 的过程中, 也可能因不等式运算而大大缩小系统稳定或不稳定区间。

对状态矩阵 $G(k)$ 作 SVD 分解, 存在二阶酉矩阵 $U(k)$ 和 $V(k)$, 使得:

$$G(k) = U(k)S(k)V(k)^T \quad (6)$$

式中: $S(k) = \text{diag}(\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ 由 $G(k)$ 唯一确定, $\sigma_1(k) \geq \sigma_2(k) > 0, \sigma_i(k) (i = 1, 2)$ 为 $G(k)$ 正奇异值; $U(k)、V(k)$ 是非唯一酉矩阵。把 $U(k)、V(k)$ 作为单位旋转矩阵进行讨论, 式(5)表示为:

$$X(k) = U(k)S(k)V(k)^T X(k-1) \quad (7)$$

将式(7)展开得:

$$X(k) = U(k)S(k)V(k)^T \dots U(1)S(1)V(1)^T X(0) \quad (8)$$

重定义 $\mathbf{R}(k) = \mathbf{U}(k)$, $\mathbf{R}(k-1) = \mathbf{V}(k)^T \mathbf{U}(k-1)$, $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{V}(1)^T \mathbf{X}(0)$, $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{X}(k)$, 得:

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{R}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{R}(k-1)\mathbf{S}(k-1)\cdots\mathbf{R}(1)\mathbf{S}(1)\mathbf{Y}(0) \quad (9)$$

易得单位旋转矩阵 $\mathbf{R}(k)$:

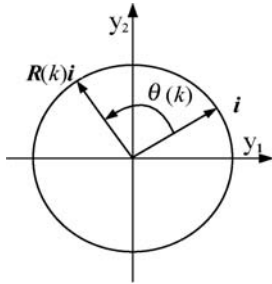
$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} \cos\theta(k) & -\sin\theta(k) \\ \sin\theta(k) & \cos\theta(k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

令 $\mathbf{D}(k) = \mathbf{R}(k)\mathbf{S}(k)$, 对于 $\mathbf{D}(k)$ 序列, 虽然第 k 项 $\mathbf{D}(k)$ 的表达式与其他序列不同, 但它不影响式(7)的状态稳定性, 那么有以下 RS 系统:

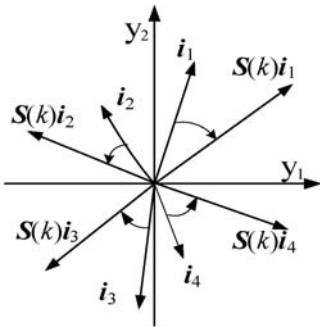
$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{Y}(k-1) \quad (11)$$

可见, 对二维离散时变线性系统的分析可以等价于对式(11)进行分析, 式(5)的稳定性分析也可以等价于对式(11)进行分析。

式(5)中每一个状态矩阵 $\mathbf{G}(k)$ 可以转化成式(9)的两个矩阵 $\mathbf{R}(k)$ 与 $\mathbf{S}(k)$, 图 2 为矩阵 $\mathbf{R}(k)$ 与矩阵 $\mathbf{S}(k)$ 的作用效果。 $\mathbf{R}(k)$ 可以使向量 \mathbf{i} 逆时针单位旋转 $\theta(k)$, 但并不会改变 \mathbf{i} 的幅值。考虑到 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k)$, 则矩阵 $\mathbf{S}(k)$ 会让向量 \mathbf{i} 在一、三象限进行角度为 $\omega'(k)$ 的顺时针方向旋转(在二、四象限进行同样角度的逆时针旋转), 并且改变向量模值的大小。



(a) 旋转效果 $\mathbf{R}(k)$



(b) 倾斜变换 $\mathbf{S}(k)$

图 2 $\mathbf{R}(k)$ 与 $\mathbf{S}(k)$ 状态变换效果图

2 RS 系统稳定性分析

2.1 单象限运动稳定性分析

定理 1 如图 3 所示, 讨论一类 RS 系统, $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{Y}(k-1)$, $k = 2, 3, \dots$, 在二维相平面 $y_1 - y_2$ 内, 其状态轨迹最终保持在第一或第三象限。

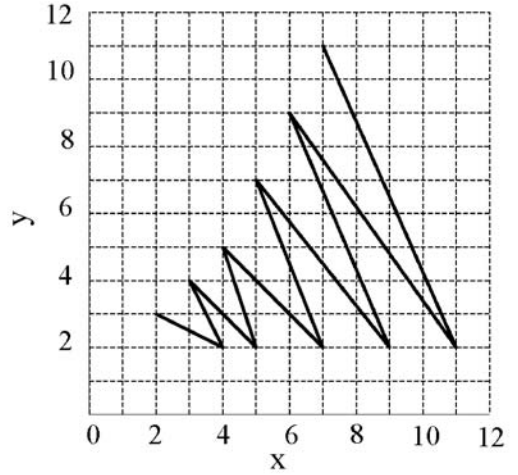


图 3 稳定性运动轨迹的模型

已知 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k)$, $\sigma_2(k) < 1$, 当满足:

$$0 < \theta(k) \leq \theta_{\max}(k) \quad (12)$$

$$0 < \kappa_2(k) < \kappa'(k) \quad (13)$$

和

$$H(k) = \frac{\sigma_1(k)^2 + \sigma_2(k)^2 \kappa(k)^2}{1 + \kappa(k)^2} < 1 \quad (14)$$

式(11)稳定。

式中:

$$\mu(k) = \frac{\sigma_2(k)}{\sigma_1(k)}; \theta_{\max}(k) = \text{atan} \left[\frac{1}{2}(1 - \mu(k)) \sqrt{\frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}} \right]$$

$$\kappa'(k) = \sqrt{\frac{\sigma_1(k)^2 - 1}{1 - \sigma_2(k)^2}}$$

$$\kappa_2(k) = \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[(1 - \mu(k)) - \sqrt{(1 - \mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}} \right]$$

2.2 单象限运动不稳定性分析

定理 2 如图 4 所示, 讨论一类 RS 系统, $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{Y}(k-1)$, $k = 2, 3, \dots$, 在二维相平面 $y_1 - y_2$ 内, 其状态轨迹最终保持在第一或第三象限。

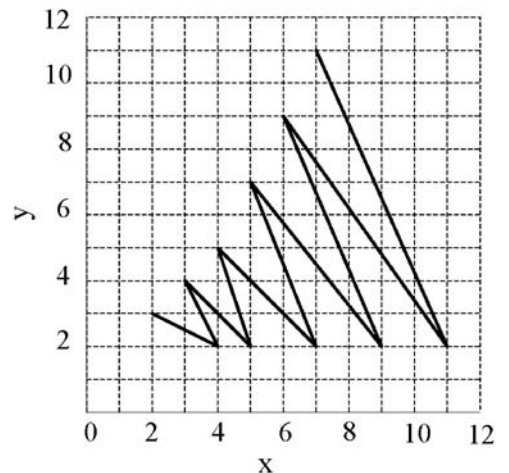


图 4 RS 系统单象限不稳定性情况

已知 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k)$, $\sigma_2(k) < 1$, 当满足:

$$0 < \theta(k) \leq \theta_{\max}(k) \quad (15)$$

$$0 < \kappa_2(k) < \kappa'(k) \quad (16)$$

和

$$H(k) = \frac{\sigma_1(k)^2 + \sigma_2(k)^2 \kappa(k)^2}{1 + \kappa(k)^2} > 1 \quad (17)$$

式(11)不稳定。

式中:

$$\mu(k) = \frac{\sigma_2(k)}{\sigma_1(k)}, \theta_{\max}(k) = \text{atan} \left[\frac{1}{2} (1 - \mu(k)) \sqrt{\frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}} \right]$$

$$\kappa'(k) = \sqrt{\frac{\sigma_1(k)^2 - 1}{1 - \sigma_2(k)^2}}$$

$$\kappa_2(k) = \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[(1 - \mu(k)) - \sqrt{(1 - \mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}} \right]$$

2.3 二四对象限对向运动稳定性分析

如图5所示,讨论一个RS系统,其状态轨迹保持在第二与第四象限对向运动。

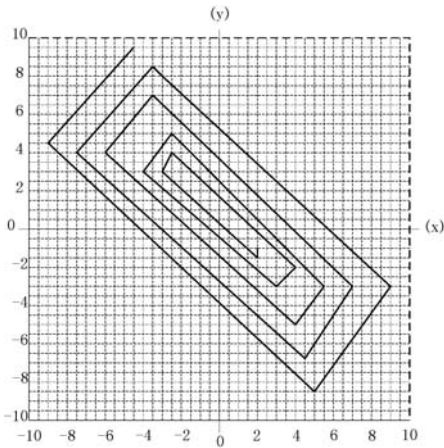


图5 RS系统两象限稳定情况

定理3 对于式(11),在二维相平面 $y_1 - y_2$ 内,已知 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k)$, $\sigma_2(k) < 1$,当满足:

$$\theta_{\min}(k) \leq \theta(k) < \pi \quad (18)$$

$$0 > \kappa_2(k) > \kappa'(k) \quad (19)$$

和

$$H(k) = \frac{\sigma_1^2(k) + \sigma_2^2(k) \kappa^2(k)}{1 + \kappa^2(k)} < 1 \quad (20)$$

式(11)稳定。

式中:

$$\theta_{\min}(k) = \pi - \text{atan} \left[\frac{1 - \mu(k)}{2 \sqrt{\mu(k)}} \right]$$

$$\kappa'(k) = \sqrt{\frac{\sigma_1(k)^2 - 1}{1 - \sigma_2(k)^2}}$$

$$\kappa_2 = \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[1 - \mu(k) - \sqrt{[1 - \mu(k)]^2 - 4\mu(k)} \right]$$

2.4 一三对象限对向运动不稳定性分析

如图6所示,讨论一个RS系统,其状态轨迹保持在第一与第三象限对向运动。

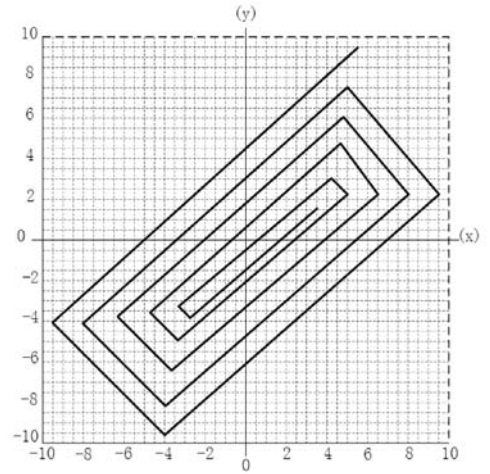


图6 RS系统两象限不稳定情况

定理4 对于式(11),在二维相平面 $y_1 - y_2$ 内,已知 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k)$, $\sigma_2(k) < 1$,当满足:

$$\theta_{\min}(k) \leq \theta(k) < \frac{3}{2}\pi \quad (21)$$

$$0 < \kappa'(k) < \kappa^*(k) \quad (22)$$

和

$$H(k) = \frac{\sigma_1^2(k) + \sigma_2^2(k) \kappa^2(k)}{1 + \kappa^2(k)} > 1 \quad (23)$$

式(11)不稳定。

式中: $\theta_{\min}(k) = \pi + \text{atan} \left[\frac{1 - \mu(k)}{2 \sqrt{\mu(k)}} \right]$, 其中 $\kappa^* = \frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}$

$$\cot(\theta(k)), \kappa' = \sqrt{\frac{\sigma_1^2(k) - 1}{1 - \sigma_2^2(k)}}$$

3 实验分析

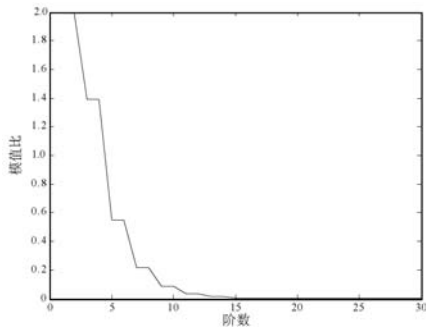
3.1 单象限运动稳定性实验

Krawtchouk 多项式构成的离散时变系统迭代公式如下:

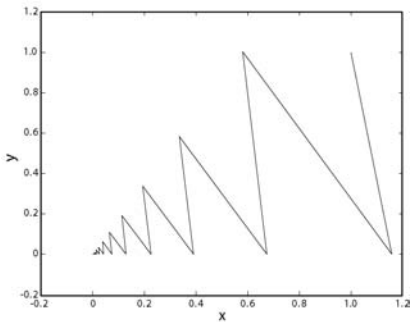
$$P_k(x) = \frac{(N-1)p - 2(k-1)p + k - 1 - x}{p(N-k)} P_{k-1}(x) - \frac{(k-1)(1-p)}{p(N-k)} P_{k-1}(x) \quad (24)$$

式中: $x = 100$, $p = 0.6$, $N = 400$ 。 $p_k(x)$ 初值为 $(1, 1)$ 。

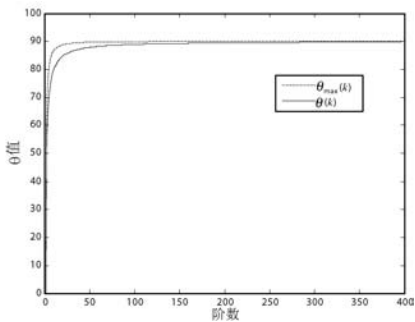
图7为旋转角度 $\theta(k)$ 与极限角度 $\theta_{\max}(k)$ 、 $G(k)$ 的奇异值 $\sigma_1(k)$ 和 $\sigma_2(k)$ 、RS 变换前后相量模值比 $H(k)$ 、临界斜率 $\kappa_2(k)$ 和 $\kappa'(k)$ 。图7(c)和(e)显示,当 $k > 1$,有 $0 < \theta(k) < \theta_{\max}(k)$,且 $0 < \theta(k) < \pi/2$, $0 < \kappa_2(k) < \kappa'(k)$,满足式(12)和式(13);图7(d)显示 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k) > 0$;图7(a)中,当 $k > 5$ 时,有 $H(k) < 1$,符合式(14)。由定理1可知,Krawtchouk 多项式的三项递归计算在点 $x = 100$ 处稳定。



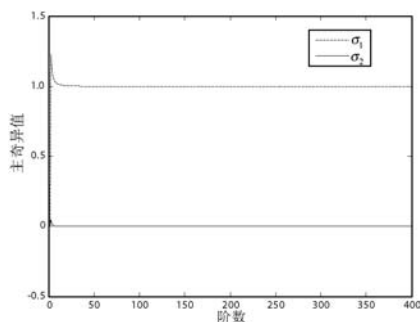
(a) 模值比函数 $H(k)$



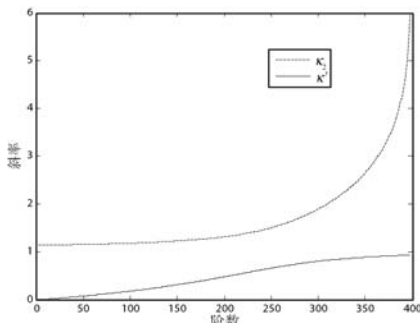
(b) 轨迹图



(c) $\theta(k)$ 的范围



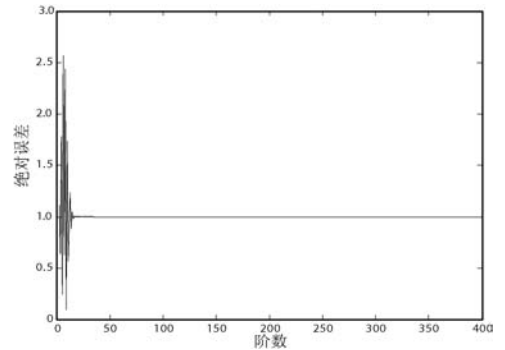
(d) 主奇异值



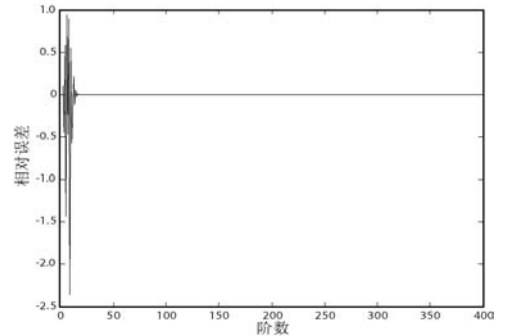
(e) κ_2 和 κ' 的关系图

图 7 RS 系统参数计算

Krawtchouk 多项式在点 $x = 100$ 递归计算的绝对误差和相对误差分别记录在图 8(a)和图 8(b)。由图 8(a)可知,当 $0 < k < 45$ 时,绝对误差开始增大,当 $k > 45$ 时,绝对误差开始减小并趋于稳定;由图 8(b)可得相对误差在极小的区间先增大然后减小并趋于稳定,绝对误差与相对误差的趋势都符合定理 1。所以 Krawtchouk 多项式在 $x = 100$ 具有递归数值稳定的性质,而以 Krawtchouk 多项式作为核函数的 Krawtchouk 矩也具有相同的稳定性性质。



(a) 绝对误差



(b) 相对误差

图 8 RS 系统误差参数计算

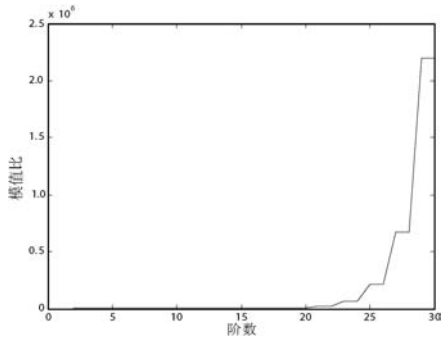
3.2 单象限运动不稳定性实验

某离散时变系统多项式迭代公式如下:

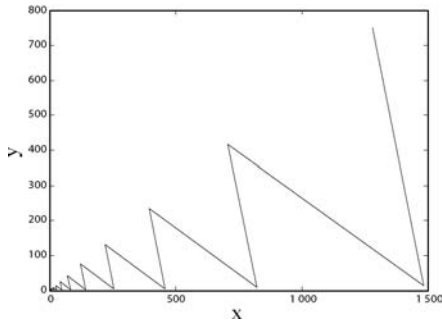
$$P_k(x) = \frac{(2k-1) \frac{(2x+1-N)}{N} P_{k-1}(x) - (k-1) \left[1 - \frac{(k-1)^2}{N^2} \right]}{k^2} P_{k-2}(x) \quad (25)$$

式中: $x = 390, N = 400, p = 0.9$ 。

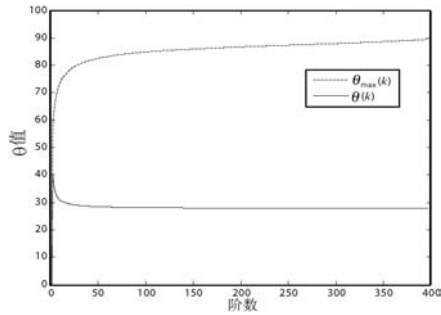
图 9 为旋转角度 $\theta(k)$ 与极限角度 $\theta_{\max}(k)$ 、 $G(k)$ 的奇异值 $\sigma_1(k)$ 和 $\sigma_2(k)$ 、RS 变换前后相量模值比 $H(k)$ 、临界斜率 $\kappa_2(k)$ 和 $\kappa'(k)$ 。图 9(c)和(e)显示,当 $k > 1$,有 $0 < \theta(k) < \theta_{\max}(k)$,且 $0 < \theta(k) < \pi/2, 0 < \kappa_2(k) < \kappa'(k)$,满足式(15)和式(16);图 9(d)显示 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k) > 0$;图 9(a)中,当 $k > 28$ 时,有 $H(k) > 1$,符合式(17)。由定理 2 可知,该离散系统多项式的三项递归计算在点 $x = 390$ 处稳定。



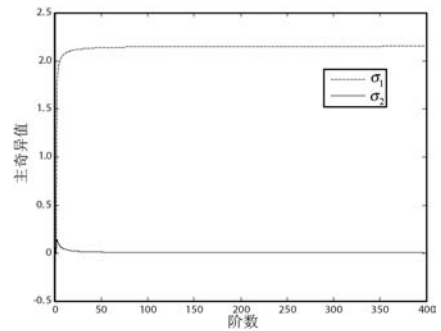
(a) 模值比函数 $H(k)$



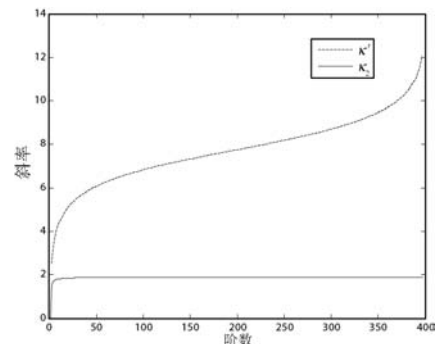
(b) 轨迹图



(c) $\theta(k)$ 的范围



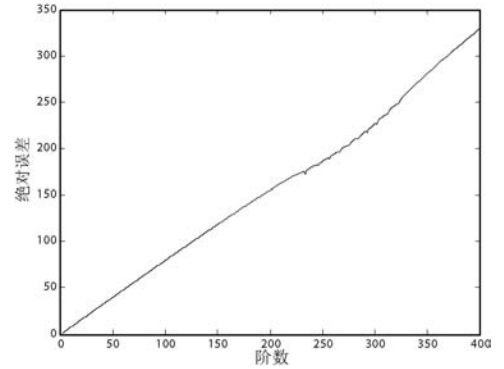
(d) 主奇异值



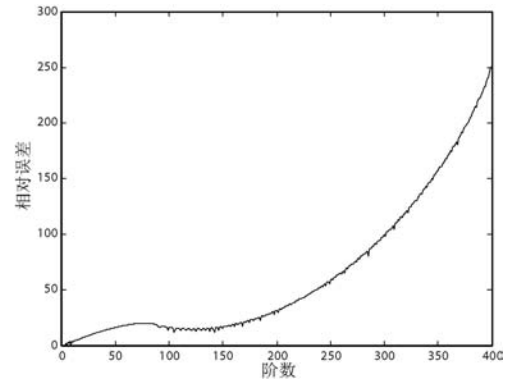
(e) κ_2 和 κ' 的关系图

图9 RS 系统参数计算

该离散系统的多项式在点 $x = 390$ 递归计算的绝对误差和相对误差分别记录在图 10(a) 和图 10(b)。由图 10(a) 可知, 当 $k > 0$ 时, 绝对误差和相对误差均一直增大, 相对误差增长趋势较绝对误差增长趋势稍缓, 但都发散, 与定理 2 的结论一致。因此该离散系统的多项式至少存在一点 $x = 390$ 具有递归数值不稳定。



(a) 绝对误差



(b) 相对误差

图 10 RS 系统误差参数计算

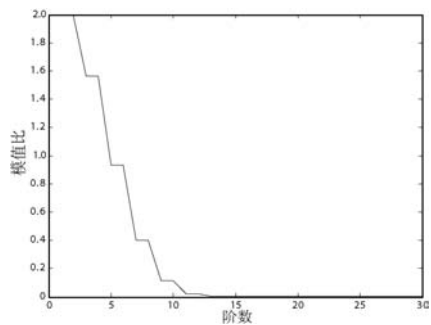
3.3 二四对象限稳定性实验

Krawtchouk 多项式构成的离散时变系统迭代公式如下:

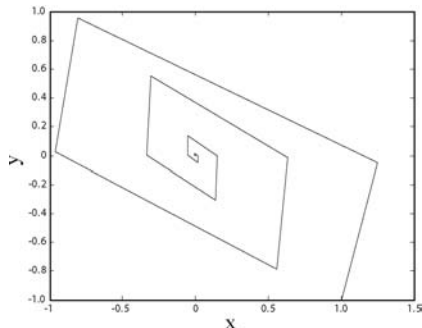
$$P_k(x) = \frac{(N-1)p - 2(k-1)p + k - 1 - x}{p(N-k)} P_{k-1}(x) - \frac{(k-1)(1-p)}{p(N-k)} P_{k-1}(x) \quad (26)$$

式中: $x = 390, p = 0.6, N = 400$ 。 $p_k(x)$ 的初值为 $(1, -1)$ 。

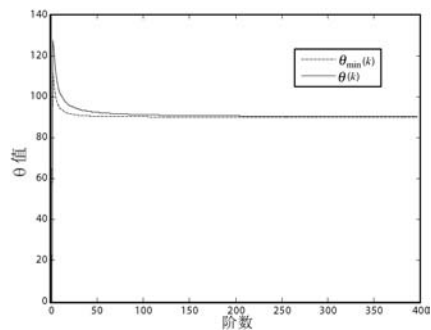
图 11 记录了旋转角度 $\theta(k)$ 与极限角度 $\theta_{\min}(k)$ 、 $G(k)$ 的奇异值 $\sigma_1(k)$ 和 $\sigma_2(k)$ 、RS 变换前后相量模值比 $H(k)$ 、临界斜率 $\kappa_2(k)$ 和 $\kappa'(k)$ 。图 7(c) 和 (e) 显示, 当 $k > 1$, 有 $0 < \theta(k) < \theta_{\max}(k)$ 且 $\pi/2 < \theta(k) < \pi$, $0 < \kappa'(k) < \kappa_2(k)$, 满足式(18)和式(19); 图 11(d) 显示 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k) > 0$; 图 11(a) 中, 当 $k > 6$ 时, 有 $H(k) < 1$, 符合式(20)。由定理 3 可知, Krawtchouk 多项式的三项递归计算在点 $x = 390$ 处稳定。



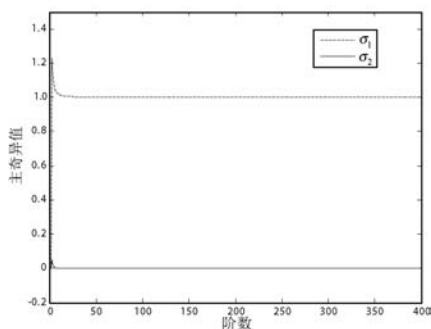
(a) 模值比函数 $H(k)$



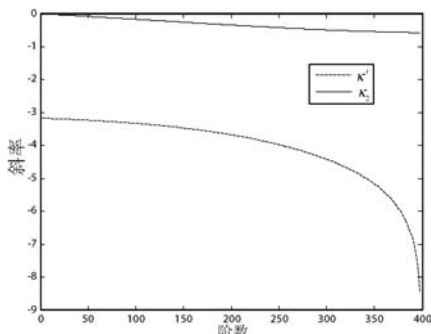
(b) 轨迹图



(c) $\theta(k)$ 的范围



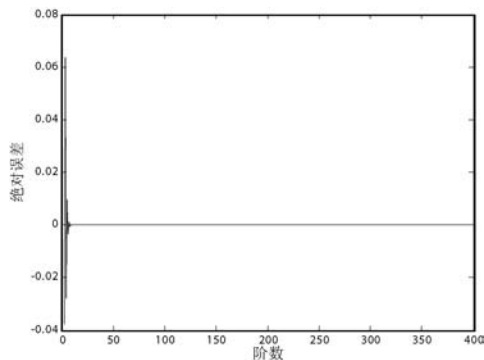
(d) 主奇异值



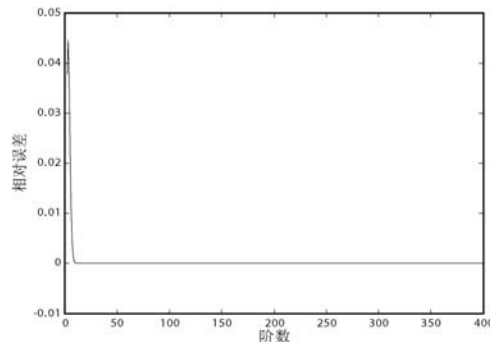
(e) κ_2 和 κ' 的关系图

图 11 RS 系统参数计算

Krawtchouk 多项式在点 $x = 390$ 递归计算的绝对误差和相对误差分别记录在图 12(a)和图 12(b)中。由图 12(a)可见当 $0 < k < 190$ 时,绝对误差和相对误差都开始增大,当 $k > 190$ 时绝对误差和相对误差都减小并趋于稳定。绝对误差与相对误差都符合定理 3。因此 Krawtchouk 多项式至少存在一点,该点在 $x = 390$ 时,多项式具有数值稳定性的性质,以 $x = 390$ 具有递归数值稳定,使 Krawtchouk 多项式作为核函数的矩也具有相同的稳定性。



(a) 绝对误差



(b) 相对误差

图 12 RS 系统误差参数计算

3.4 一三对象限不稳定性实验

某离散时变系统多项式迭代公式如下:

$$P_k(x) = \frac{(N-1)p - 2(k-1)p + k - 1 - x}{\sqrt{(1-p)k^2p(N-k)}} P_{k-1}(x) - (-2) \sqrt{\frac{(k-1) \frac{N-k+1}{k}}{N-k}} P_{k-2}(x) \quad (27)$$

式中: $x = 390, p = 0.9, N = 400$ 。 $p_k(x)$ 初值为 $(1, 1)$ 。

图 13 为旋转角度 $\theta(k)$ 与极限角度 $\theta_{\min}(k)$ 、 $G(k)$ 的奇异值 $\sigma_1(k)$ 和 $\sigma_2(k)$ 、RS 变换前后相量模值比 $H(k)$ 、临界斜率 $\kappa^*(k)$ 和 $\kappa'(k)$ 。图 13(c)和(e)显示,当 $k > 50$,有 $0 < \theta_{\min}(k) < \theta(k)$ 且 $\pi < \theta(k) < 3\pi/2, 0 < \kappa^*(k) < \kappa'(k)$, 满足式(21)和式(22);图 13(d)显示 $\sigma_1(k) > \sigma_2(k) > 0$;图 13(a)中,当 $k > 25$ 时,有 $H(k) > 1$,符合式(23)。由定理 4 可知,该离散系统多项式的三项递归计算在点 $x = 390$ 处不稳定。

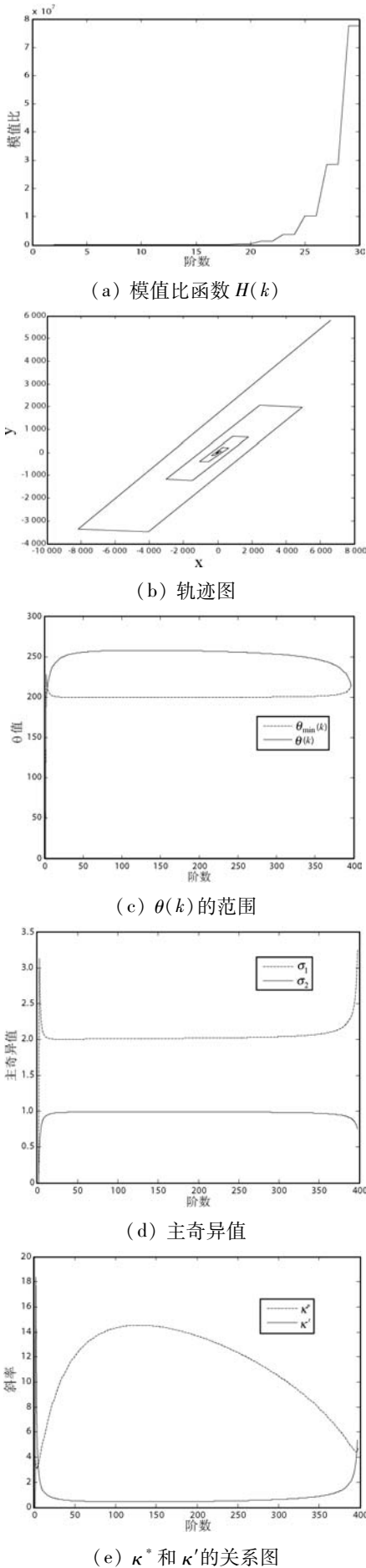


图 13 RS 系统参数计算

该离散系统多项式在点 $x = 390$ 递归计算的绝对误差和相对误差分别记录在图 14(a) 和图 14(b) 中。由图 14(a) 可得当 $0 < k < 30$ 时, 绝对误差开始增大, 当 $30 < k < 98$ 时, 绝对误差减小, $k > 98$ 时绝对误差又开始增大并趋于发散; 由图 14(b) 可得当 $0 < k < 50$ 时, 相对误差开始增大, 当 $50 < k < 150$ 时, 相对误差开始减小, 当 $k > 150$ 时相对误差又开始增大并趋于发散。由此可得绝对误差与相对误差都与定理 4 的结论一致, 该离散系统多项式至少存在一点 $x = 390$ 具有递归数值不稳定。

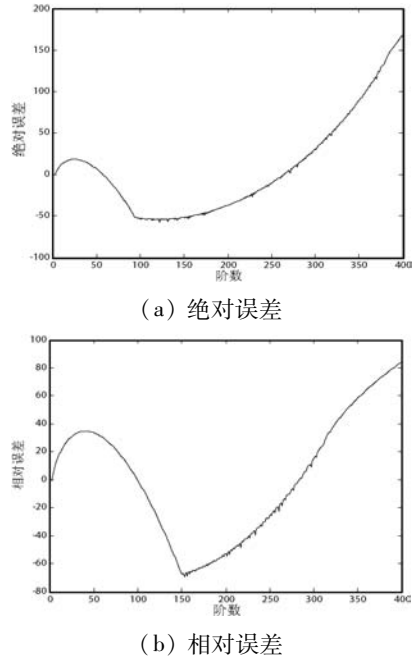


图 14 RS 系统误差参数计算

4 结 语

本文通过 SVD 分解建立新的离散线性时变系统 RS 模型, 基于李雅普诺夫定理提出关于二阶离散时变线性系统的两个稳定性判断充分条件和两个不稳定性判断充分条件。实验结果验证了所提出的离散线性时变系统稳定性与不稳定性判断条件的有效性。

参 考 文 献

[1] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments[J]. Journal of the Optical Society of America, 1980, 70(8):920 - 930.

[2] Mohamad S, Gopalsamy K. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135(1):17 - 38.

[3] Chen Z, Zhao D, Fu X. Discrete analogue of high-order periodic Cohen-Grossberg neural networks with delay[J]. Ap-

plied Mathematics and Computation, 2009, 214(1): 210 – 217.

- [4] 钱明霞, 嵇小辅. 状态饱和和离散线性系统的稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1475 – 1480.
- [5] 王金玲. 基于连续和离散复杂系统的稳定性及耗散性分析 [D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2019.
- [6] 齐春子, 吴宏鑫, 吕振铎. 多变量全系数自适应控制系统稳定性的研究 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 489 – 494.
- [7] 张振国, 刘卫胜. 在李雅普诺夫意义下全局渐过稳定一个充分条件的研究 [J]. 河北工学院学报, 1995, 24(3): 80 – 84.
- [8] 关铁峰, 李铁寿. 离散线性时变系统稳定性研究 [J]. 计算技术与自动化, 2004, 23(3): 5 – 8, 15.
- [9] 关铁峰, 李铁寿. 二阶离散线性时变系统的一种稳定性判据 [J]. 计算技术与自动化, 2003, 22(4): 12 – 15.

(上接第 31 页)

5 结 语

本文提出一个基于 Spark 的 RDF 数据划分方法 SSQ, 将 SPARQL 查询转化为 Spark 分布式平台计算框架上的 RDD 操作。该方法在散列分区的基础上复制必要的三元组来使得查询可以在单个分区或者少量的分区内并行执行, 减少分区间的通信。利用 URL 的层次结构划分的基础上实现再划分, 不仅降低了三元组的复制率, 同时实现分区均衡。对查询进行划分, 使每个子查询可以在单个分区执行, 并优化子查询内和子查询间的连接顺序来减少匹配次数, 提高查询的执行效率。实验结果表明, 本文算法在查询效率上具有明显优势并且具有良好的可扩展性。

参 考 文 献

- [1] W3C. RDF1.1 Primer [EB/OL]. (2004 – 02 – 10) [2017 – 04 – 01]. <http://www.w3.org/TR/rdf – primer/>.
- [2] Harbi R, Abdelaziz I, Kalnis P, et al. Evaluating SPARQL queries on massive RDF datasets [J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2015, 8(12): 1848 – 1851.
- [3] Neumann T, Weikum G. The RDF-3X engine for scalable management of RDF data [J]. The VLDB Journal, 2010, 19(1): 91 – 113.
- [4] Zou L, Özsu M T, Chen L, et al. gStore: A graph-based SPARQL query engine [J]. The VLDB Journal, 2014, 23(4): 565 – 590.
- [5] Wylot M, Hauswirth M, Cudré-Mauroux P, et al. RDF data storage and query processing schemes: A survey [J]. ACM Computing Surveys (CSUR), 2018, 51(4): 1 – 36.
- [6] Abdelaziz I, Harbi R, Khayyat Z, et al. A survey and experimental comparison of distributed SPARQL engines for very large RDF data [J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2017, 10(13): 2049 – 2060.
- [7] 邹磊, 彭鹏. 分布式 RDF 数据管理综述 [J]. 计算机研究与发展, 2017, 54(6): 1213 – 1224.
- [8] Cossu M, Färber M, Lausen G. PRoST: distributed execution of SPARQL queries using mixed partitioning strategies [C] // Proceedings of the 21th International Conference on Extending Database Technology, 2018: 469 – 472.
- [9] Ayala V A A, Koleva P, Alzogbi A, et al. Relational schemata for distributed SPARQL query processing [C] // Proceedings of the International Workshop on Semantic Big Data. ACM, 2019: 3.
- [10] Schätzle A, Przyjacieli-Zablocki M, Skilevic S, et al. S2RDF: RDF querying with SPARQL on spark [J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2016, 9(10): 804 – 815.
- [11] Graux D, Jachiet L, Geneves P, et al. Sparqlgx: Efficient distributed evaluation of sparql with apache spark [C] // International Semantic Web Conference. Springer, 2016: 80 – 87.
- [12] Schätzle A, Przyjacieli-Zablocki M, Berberich T, et al. S2X: Graph-parallel querying of RDF with GraphX [M] // Wang F S, Luo G, Weng C H, et al. Biomedical Data Management and Graph Online Querying. Springer, 2015: 155 – 168.
- [13] Gombos G, Kiss A. P-Spar(k)ql: SPARQL evaluation method on Spark GraphX with parallel query plan [C] // 2017 IEEE 5th International Conference on Future Internet of Things and Cloud (FiCloud). IEEE, 2017: 212 – 219.
- [14] Salvadores M, Correndo G, Harris S, et al. The design and implementation of minimal RDFS backward reasoning in 4store [C] // Extended Semantic Web Conference. Springer, 2011: 139 – 153.
- [15] Kaoudi Z, Kyzirakos K, Koubarakis M. SPARQL query optimization on top of DHTs [C] // International Semantic Web Conference. Springer, 2010: 418 – 435.
- [16] Huang J, Abadi D J, Ren K. Scalable SPARQL querying of large RDF graphs [J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2011, 4(11): 1123 – 1134.
- [17] Lee K, Liu L. Scaling queries over big RDF graphs with semantic hash partitioning [J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2013, 6(14): 1894 – 1905.
- [18] Wu B, Zhou Y, Yuan P, et al. Scalable SPARQL querying using path partitioning [C] // 2015 IEEE 31st International Conference on Data Engineering. IEEE, 2015: 795 – 806.
- [19] 杜方. 一种基于数据划分实现分布式 SPARQL 查询的方法 [J]. 计算机应用与软件, 2016, 33(10): 23 – 27.
- [20] Curé O, Naacke H, Baazizi M A, et al. On the evaluation of RDF distribution algorithms implemented over apache spark [EB]. arXiv:1507.02321, 2015.