

# 时空时滞混沌系统反同步控制及应用研究

李力厚<sup>1</sup> 冯亚萍<sup>1</sup> 王书义<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(洛阳铁路信息工程学校 河南 洛阳 471000)

<sup>2</sup>(中国人民解放军第五七一五工厂 河南 洛阳 471000)

**摘要** 针对一类新的时空时滞惯性神经网络,研究其反同步控制及在图像保密通信上的应用。采用变量代换准则,避免了原二阶微分系统固有的复杂特性;设计一个有效地输出反馈控制器,并结合詹森(Jensen)不等式和互凸组合(RCC)方法,得到了一个较小保守性的时空时滞惯性神经网络反同步定理;通过仿真实现了主要结果在图像保密通信上的应用并证明了所提加密方法的优越性。

**关键词** 时空时滞惯性神经网络 输出反馈控制 反同步 保密通信

中图分类号 TP13 TP3

文献标志码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2024.04.049

## ANTI-SYNCHRONIZATION CONTROL FOR SPATIOTEMPORAL DELAYED CHAOTIC SYSTEMS AND ITS APPLICATION

Li Lihou<sup>1</sup> Feng Yaping<sup>1</sup> Wang Shuyi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Luoyang Railway Information Engineering School, Luoyang 471000, Henan, China)

<sup>2</sup>(5715th Factory of the People's Liberation Army of China, Luoyang 471000, Henan, China)

**Abstract** For a novel class of spatiotemporal delayed inertial neural networks (SDINNs), its anti-synchronization control and application on image secure communication are studied. A variable substitution was used to avoid the inherent complex characteristics of the original second-order differential system. It designed an effective output feedback controller and combined with Jensen's inequality and the reciprocally convex combination (RCC) method, so that a less conservative anti-synchronization theorem of the SDINNs was obtained. The simulation realized the application of the main results on image secure communication and illustrated the superiority of the encryption method of this paper.

**Keywords** SDINNs Output feedback controller Anti-synchronization Secure communication

## 0 引言

在过去的几十年里,神经网络已经被广泛应用于自动控制、图像处理、信号处理、故障诊断、组合优化、辅助记忆等领域<sup>[1-2]</sup>。人工神经网络在超大规模集成实现中经常遇到时滞问题,其原因是传输线和部分等效电路存在传输延迟,这将导致系统的不稳定,因此很多学者在研究神经网络时都会考虑时滞的影响<sup>[3]</sup>。神经网络中常见的时滞有常数时滞<sup>[4]</sup>、时变时滞<sup>[5]</sup>、分布时滞<sup>[6]</sup>等。实际上,由于实际系统的复杂性,相比于常数时滞,时变时滞更能反映出实际的时滞状

态<sup>[5]</sup>。此外,神经网络往往具备空间特性,因此在神经网络中考虑分布时滞也是十分合理的<sup>[6]</sup>。基于以上观点,本文在研究神经网络时同时考虑了时变时滞和分布时滞,以增强系统模型与实际系统的切合度。

世界上任何运动都发生在一定的时空环境里面,像波的传播现象、化学反应过程、食物网等,因此离开空间位置而建立的数学模型是不准确的<sup>[7]</sup>。在神经网络中,一方面,多层细胞神经网络的动力学行为与每个神经单元的位置及由整个神经网络的空间分布结构产生的相互作用有关。另一方面,当电子在非均匀磁场中运动时,扩散现象是无法避免的<sup>[8]</sup>。以上两个因素

决定了神经网络的动态行为不仅与时间有关,还受空间位置的影响。因此,在神经网络中考虑空间因素,即研究时空神经网络十分有必要<sup>[9]</sup>。

从数学、物理学的角度,大多数神经网络可理解为超阻尼时的数学模型,可以用一阶常微分方程来表示<sup>[10]</sup>。而在许多实际问题中,也需要考虑弱阻尼情况下的动力学特性,弱阻尼又称为惯性,从数学角度表示为二阶导数项。因此,近年来,一些学者开始尝试将惯性项引入神经网络,或等价地在电路中考虑电感的影响,并得到了一些相关的结果<sup>[11]</sup>。

本文的研究对象为包含时变时滞和分布时滞的时空惯性神经网络。针对该神经网络,本文将研究其反同步控制问题。因为反同步在通信系统中得到了广泛的应用,我们可以通过同步和反同步之间的变换来实现数字信号的连续传输,从而大大提高了系统的安全性和保密性<sup>[12]</sup>。与此同时,惯性项已经被证明是动力学方程中产生混沌和分岔的关键工具<sup>[11]</sup>。因此将时空惯性神经网络的反同步应用于图像混沌加密中恰如其分。其主要原理是利用驱动系统产生的混沌信号作为载体对需要传送的信息进行遮掩或隐藏,同时在接收端利用已经反同步了的驱动系统产生的信号去掩盖,以使有用的信息得到恢复。同时由于混沌信号具有跟宽带相类似的噪声等特性,那些恶意的接收者很可能将加密后的信号当作噪声信号而忽略,即使是一些有心人也将很难从中获得有用信息信号,从而实现保密通信<sup>[13]</sup>。

本文的主要创新点和贡献总结如下:(1)在现存的时空惯性神经网络的基础上同时考虑时变时滞和分布时滞,更加贴合实际系统。(2)针对惯性神经网络的反同步控制问题进行研究,是对惯性神经网络动力学研究的一次有意义的尝试。(3)利用时空时滞惯性神经网络的反同步构建了一个新的时空混沌密码系统,仿真结果表明,与现有的一些密码系统相比,本文提出的密码系统加密效果更好。

## 1 模型描述与预备知识

本文考虑如下时空时滞惯性神经网络:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t, \delta)}{\partial t^2} = & -\mathbf{A}\mathbf{x}(t, \delta) - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{x}(t, \delta)}{\partial t} + \mathbf{J} + \\ & \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{x}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t, \delta)) + \\ & \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - \eta(t), \delta)) + \mathbf{E} \int_{t-\tau}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}(\theta, \delta)) d\theta \quad (1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_1(t, \delta) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t, \delta)$$

式中: $\mathbf{x}(t, \delta) = (x_1(t, \delta), x_2(t, \delta), \dots, x_n(t, \delta))^T$ 表示系统的状态向量; $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)^T \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$ 代表空间向量,其中, $\Omega = \{\delta \mid |\delta_k| \leq l_k, k = 1, 2, \dots, m\}$ 是具有平滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集合; $\mathbf{A} = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 $\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 是正定的矩阵; $\mathbf{A}_k = \text{diag}\{\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{nk}\}$ 表示传播扩散算子; $\mathbf{J}$ 表示系统的额外输入; $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ 、 $\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n}$ 和 $\mathbf{E} = (e_{ij})_{n \times n}$ 代表神经元之间的连接权值矩阵; $\eta(t) > 0$ 表示系统的时变时滞,并且假设其满足 $0 < \eta(t) \leq \eta$ ,  $\frac{d\eta(t)}{dt} \leq \bar{\eta}$ ;  $\tau > 0$ 是系统的分布时滞,则系统式(1)的边界条件和初始条件可以分别定义为:

$$\begin{aligned} x_m(t, \delta) = & 0, (t, \delta) \in [-\max(\eta, \tau), +\infty) \times \partial\Omega \\ x_m(\vartheta, \delta) = & \varphi_m(\vartheta, \delta), (\vartheta, \delta) \in [-\max(\eta, \tau), 0] \times \Omega \end{aligned}$$

其中, $\varphi_m(\vartheta, \delta)$ 是一个连续有界的函数。

此外, $\mathbf{g}(\cdot) = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_n(\cdot)]^T$ 表示激励函数,且满足 $\mathbf{H}^- \leq \frac{\mathbf{g}(\theta_1) - \mathbf{g}(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} \leq \mathbf{H}^+$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{H}^-$ 和 $\mathbf{H}^+$ 是任意的对角矩阵; $\mathbf{Z}_1(t, \delta)$ 是系统的输出变量; $\mathbf{F} = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 是已知的常数矩阵。

我们通过调研发现,一方面,大多数现存的关于惯性神经网络的文献中在建模时只考虑了时变时滞 $\eta(t)$ ,如文献[9, 11, 14-16],但是在系统中考虑分布时滞的文献却很少,如文献[17-18]。严格说来,由于存在许多不同轴突大小和长度的平行通路,神经网络通常具有空间性质,因此,在模型选取过程中考虑分布时滞更加合理。另一方面,鉴于神经网络的空间性质以及不均匀磁场中电子的扩散现象,本文同时考虑了反应扩散项,这在现存的一些文献中也有所涉及,如文献[9]和文献[14]。但是值得一提的是,据作者所知,在惯性神经网络模型中同时考虑分布时滞和反应扩散项的结果尚未出现。因此,与现存的一些文献相比,本文所考虑的惯性神经网络模型在一定意义上更能满足实际系统建模的需要。

如果把系统(1)看作驱动系统,则相应的响应系统可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{y}(t, \delta)}{\partial t^2} = & -\mathbf{A}\mathbf{y}(t, \delta) - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}(t, \delta)}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{u}(t, \delta) + \\ & \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{y}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t, \delta)) + \\ & \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t - \eta(t), \delta)) + \mathbf{E} \int_{t-\tau}^t \mathbf{g}(\mathbf{y}(\theta, \delta)) d\theta \quad (2) \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{y}(t, \delta) = (y_1(t, \delta), y_2(t, \delta), \dots, y_n(t, \delta))^T$ 表示响应系统的状态向量; $\mathbf{u}(t, \delta)$ 是需要设计的输出反馈

控制器。

定义  $Z_2(t, \delta) = Fy(t, \delta)$  是驱动系统的输出变量。系统式(2)的边界条件和初始条件分别为:

$$\begin{cases} y_m(t, \delta) = 0, (t, \delta) \in [-\max(\eta, \tau), +\infty) \times \partial\Omega \\ y_m(\vartheta, \delta) = \zeta_m(\vartheta, \delta), (\vartheta, \delta) \in [-\max(\eta, \tau), 0] \times \Omega \end{cases}$$

式中:  $\zeta_m(\vartheta, \delta)$  是一个连续有界的函数。

定义反同步误差  $w(t, \delta) = x(t, \delta) + y(t, \delta)$ , 则可以得到如下误差系统:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(t, \delta)}{\partial t^2} &= -Aw(t, \delta) - B \frac{\partial w(t, \delta)}{\partial t} + u(t, \delta) + \\ &\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( A_k \frac{\partial w(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) + Ch(w(t, \delta)) + \\ Dh(w(t - \eta(t), \delta)) &+ E \int_{t-\tau}^t h(w(\theta, \delta)) d\theta \quad (3) \end{aligned}$$

式中:  $w(t, \delta) = (w_1(t, \delta), w_2(t, \delta), \dots, w_n(t, \delta))^T$  表示误差系统的状态向量; 定义  $\tilde{Z}(t, \delta) = Fe(t, \delta)$  为输出误差; 此外,  $h(w(t, \delta)) = g(x(t, \delta)) + g(y(t, \delta))$ ,  $h(w(t - \eta(t), \delta)) = g(x(t - \eta(t), \delta)) + g(y(t - \eta(t), \delta))$ 。

上述二阶微分系统固有的复杂性会给后续的处理带来很大的困难, 因此, 本文采用变量代换方法, 将原二阶微分系统转变为一阶微分形式。即:

$$\alpha(t, \delta) = \frac{\partial w(t, \delta)}{\partial t} + Yw(t, \delta)$$

式中:  $Y$  为已知常对角矩阵。定义  $M = B - Y, N = MY - A$ , 则误差系统(3)可以改写为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, \delta)}{\partial t} = \alpha(t, \delta) - Yw(t, \delta) \\ \frac{\partial \alpha(t, \delta)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( A_k \frac{\partial w(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) - M\alpha(t, \delta) + \\ Nw(t, \delta) + Ch(w(t, \delta)) + u(t, \delta) + \\ Dh(w(t - \eta(t), \delta)) + E \int_{t-\tau}^t h(w(\theta, \delta)) d\theta \\ \tilde{Z}(t, \delta) = Fe(t, \delta) \end{cases} \quad (4)$$

针对驱动系统(1)和响应系统(2)的反同步控制问题, 本文采用输出反馈控制策略, 控制器设计如下:

$$u(t, \delta) = -K\tilde{Z}(t, \delta) = -KFw(t, \delta) \quad (5)$$

式中:  $K$  表示控制器的增益矩阵。

下面介绍主要引理, 这对主要结果的导出至关重要。

**引理 1**<sup>[7]</sup> 令  $\Omega$  为一个立方体  $|\delta_k| \leq l_k, k = 1, 2, \dots, m$ , 并且令  $\nu(\delta)$  为一个属于  $C^1(\Omega)$  的实值函数, 且满足  $\nu(\delta)|_{\partial\Omega} = 0$ 。那么:

$$\int_{\Omega} \nu(\delta) d\delta \leq l_k^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \nu(\delta)}{\partial \delta_k} \right| d\delta$$

**引理 2**<sup>[14]</sup> 对任意的  $n \times n$  矩阵  $X > 0$ , 若存在向量函数  $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 且积分  $\int_a^b \omega(s) ds$  和  $\int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds$  有定义, 则有如下不等式成立:

$$\int_a^b \omega^T(s) X \omega(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \left( \int_a^b \omega(s) ds \right)^T X \int_a^b \omega(s) ds$$

**引理 3**<sup>[19]</sup> 假设  $g_1, g_2, \dots, g_N: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^1$  在  $\mathbf{R}^m$  的开子集  $E$  上是正定的, 则  $g_i$  在  $E$  上的互凸组合满足如下形式:

$$\left\{ \nu_i \mid \nu_i > 0, \sum_i \nu_i = 1 \right\} \sum_i \frac{1}{\nu_i} g_i(t) = \sum_i g_i(t) + \max_{f_{i,j}(t)} \sum_{i \neq j} f_{i,j}(t)$$

其中:

$$\left\{ f_{i,j}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^1, f_{i,j}(t) = f_{j,i}(t), \begin{bmatrix} g_i(t) & f_{i,j}(t) \\ f_{j,i}(t) & g_j(t) \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

**引理 4**<sup>[9]</sup> 根据所考虑激励函数的特征, 对于任意对角矩阵  $\Xi_1$  和  $\Xi_2$ , 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} 0 \leq & 2[h(w(t, \delta)) - E^- w(t, \delta)]^T \Xi_1 \times \\ & [E^+ w(t, \delta) - h(w(t, \delta))] \\ 0 \leq & 2[h(w(t - \eta(t), \delta)) - E^- w(t - \eta(t), \delta)]^T \Xi_2 \times \\ & [E^+ w(t - \eta(t), \delta) - h(w(t - \eta(t), \delta))] \end{aligned}$$

## 2 主要结果

本节通过建立合适的李雅普诺夫泛函, 并结合适当的处理方法, 得到了驱动系统式(1)和响应系统式(2)在控制器式(5)作用下的反同步准则, 具体如下:

**定理 1** 对于给定的一系列正定的矩阵  $P, Q_1, Q_2, T$ , 任意矩阵  $\tilde{V}$ , 任意对角矩阵  $\Xi_1, \Xi_2$ , 以及选定的误差系统式(4)的合适的参数, 如果有如下线性矩阵不等式成立:

$$\Psi = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \\ * & D & 0 & 0 \\ * & * & E & 0 \\ * & * & * & F \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= [A_1^T, A_2^T]^T \\ A_1 &= [-2PY - 2\Lambda Y + \eta^2 V - 2E^- \Xi_1 E^+, P + N^T - F^T K^T] \\ A_2 &= [P^T + N - KF, -2M], B = [B_1^T, B_2^T]^T \\ B_1 &= [0, (E^+)^T \Xi_1^T + E^- \Xi_1, 0], B_2 = [0, C, D] \\ C &= [0, C_1^T]^T, C_1 = [0, E], D = [D_1^T, D_2^T, D_3^T]^T \\ D_1 &= [-2E^- \Xi_2 E^+, 0, (E^+)^T \Xi_2^T + E^- \Xi_2] \\ D_2 &= [0, Q_1 + Q_2 + \tau T - 2\Xi_1, 0] \\ D_3 &= [\Xi_2 E^+ + \Xi_2^T (E^-)^T, 0, -(1 - \bar{\eta}) Q_2 - 2\Xi_2] \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \text{diag}\{-\mathbf{Q}_1, -\mathbf{T}/\tau\}, \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \tilde{\mathbf{V}} \\ * & \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

那么,在控制器式(5)的作用下,驱动系统式(1)和响应系统式(3)能够达到反同步。

证明:针对误差系统式(4),考虑如下的李雅普诺夫泛函:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(t, \delta) \mathbf{P} \mathbf{w}(t, \delta) d\delta + \\ &\int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \boldsymbol{\alpha}(t, \delta) d\delta + \\ &\int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \mathbf{A}_k \left( \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) d\delta \\ V_2(t) &= \int_{t-\eta}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(\theta, \delta)) \mathbf{Q}_1 \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta + \\ &\int_{t-\eta(t)}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(\theta, \delta)) \mathbf{Q}_2 \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta \\ V_3(t) &= \int_{-t}^0 \int_{t+\rho}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(\theta, \delta)) \mathbf{T} \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta d\rho \\ V_4(t) &= \eta \int_{-\eta}^0 \int_{t+\rho}^t \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\theta, \delta) \mathbf{V} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta d\rho \end{aligned}$$

首先,利用基本的求导法则对  $V_1(t)$  进行求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2 \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(t, \delta) \mathbf{P} [\boldsymbol{\alpha}(t, \delta) - \mathbf{Y} \mathbf{w}(t, \delta)] d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \left[ \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) - \right. \\ &\mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}(t, \delta) + \mathbf{N} \mathbf{w}(t, \delta) + \mathbf{C} \mathbf{h}(\mathbf{w}(t, \delta)) + \\ &\mathbf{D} \mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta(t), \delta)) - \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{w}(t, \delta) + \\ &\left. \mathbf{E} \int_{t-\tau}^t \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\theta \right] d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right)^T \mathbf{A}_k \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) d\delta \end{aligned}$$

参考文献[7],由格林公式、狄利克雷边界条件和引理1,可得出:

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \delta_k} \left( \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) d\delta &= \\ 2 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial t} + \mathbf{Y} \mathbf{w}(t, \delta) \right] \nabla \left( \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right)_{k=1}^m d\delta &= \\ -2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k \left( \frac{\partial \mathbf{w}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right)^T \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}(t, \delta)}{\partial \delta_k} \right) d\delta - \\ 2 \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(t, \delta) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Y} \mathbf{w}(t, \delta) d\delta \end{aligned}$$

$$\text{式中: } \bar{\mathbf{A}} = \text{diag} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_{1k}}{l_k^2}, \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_{2k}}{l_k^2}, \dots, \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_{nk}}{l_k^2} \right\}$$

综上所述,有:

$$\dot{V}_1(t) = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(t, \delta) [-2\mathbf{P}\mathbf{Y} - 2\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Y}] \mathbf{w}(t, \delta) d\delta +$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) [-2\mathbf{M}] \boldsymbol{\alpha}(t, \delta) d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) [\mathbf{P}^T + \mathbf{N} - \mathbf{K}\mathbf{F}] \mathbf{w}(t, \delta) d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \mathbf{C} \mathbf{h}(\mathbf{w}(t, \delta)) d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \mathbf{D} \mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta(t), \delta)) d\delta + \\ &2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(t, \delta) \mathbf{E} \int_{t-\tau}^t \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\theta d\delta \end{aligned}$$

对  $V_2(t)$  进行求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(t, \delta)) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{h}(\mathbf{w}(t, \delta)) d\delta - \\ &\int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(t - \eta, \delta)) \mathbf{Q}_1 \mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta, \delta)) d\delta - \\ &(1 - \bar{\eta}) \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(t - \eta(t), \delta)) \mathbf{Q}_2 \times \\ &\mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta(t), \delta)) d\delta \end{aligned}$$

对  $V_3(t)$  进行求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \int_{\Omega} \tau \cdot \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(t, \delta)) \mathbf{T} \mathbf{h}(\mathbf{w}(t, \delta)) d\delta - \\ &\int_{t-\tau}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(\theta, \delta)) \mathbf{T} \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta \end{aligned}$$

根据引理2中的 Jensen 不等式,下式显然成立:

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}^T(\mathbf{w}(\theta, \delta)) \mathbf{T} \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta &\leq \\ - \frac{1}{\tau} \left[ \int_{t-\tau}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta \right]^T \times \\ \mathbf{T} \left[ \int_{t-\tau}^t \int_{\Omega} \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\delta d\theta \right] \end{aligned}$$

对  $V_4(t)$  进行求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= \eta^2 \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\theta, \delta) \mathbf{V} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta - \\ &\eta \int_{t-\eta}^t \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\theta, \delta) \mathbf{V} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta \end{aligned}$$

根据引理3中的 RCC 方法,可得:

$$\begin{aligned} - \eta \int_{t-\eta}^t \int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\theta, \delta) \mathbf{V} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta &\leq \\ - \left[ \int_{t-\eta}^{t-\eta(t)} \int_{\Omega} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta \right]^T &\times \\ \left[ \int_{t-\eta(t)}^t \int_{\Omega} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta \right] &\times \\ \left[ \int_{t-\eta}^{t-\eta(t)} \int_{\Omega} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta \right] &\times \\ \left[ \int_{t-\eta(t)}^t \int_{\Omega} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\delta d\theta \right] &\times \\ \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \tilde{\mathbf{V}} \\ * & \mathbf{V} \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

假设:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(t) &= \text{col} \{ \mathbf{w}(t, \delta) \quad \boldsymbol{\alpha}(t, \delta) \quad \mathbf{w}(t - \eta(t), \delta) \\ &\mathbf{h}(\mathbf{w}(t, \delta)) \quad \mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta(t), \delta)) \\ &\mathbf{h}(\mathbf{w}(t - \eta, \delta)) \quad \int_{t-\tau}^t \mathbf{h}(\mathbf{w}(\theta, \delta)) d\theta \} \end{aligned}$$

$$\int_{t-\eta}^{t-\eta(t)} \mathbf{w}(\theta, \delta) d\theta \quad \int_{t-\eta(t)}^t \mathbf{w}(\theta, \delta) d\theta \}$$

那么,如果式(6)成立,结合引理 4 中的不等式,有:

$$\dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) < \psi^T(t) \Psi \psi(t) < 0,$$

则根据李雅普诺夫稳定性理论可知,误差系统式(4)是稳定的,即驱动系统式(1)和响应系统式(3)能够达到反同步。证毕。

### 3 应用仿真

简便起见,对于驱动系统式(1),假设  $n = 2$ , 而且考虑如下参数: $A = \text{diag}\{3.0, 2.7\}$

$$B = \text{diag}\{2.1, 2.2\}, A_k = \text{diag}\{0.01, 0.01\}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 7.3 \\ -6.4 & 0.9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1.5 & 8.2 \\ 9.6 & -1.9 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.01 \\ 0.01 & 1.2 \end{bmatrix}, J = \mathbf{0}, F = \text{diag}\{1.3, 1.2\}$$

$$g(\cdot) = 0.5 \tanh(\cdot), \tau = 0.1, \eta(t) = \frac{2 \exp(t)}{15 + 5 \exp(t)}.$$

通过简单计算容易得到  $\eta = 0.35, \bar{\eta} = 0.1$ 。此外,系统式(1)的初始条件设为:

$$x_1(\vartheta, \delta) = 11.1 \sin(\delta)$$

$$x_2(\vartheta, \delta) = -10.3 \cos(\delta)$$

基于以上参数,驱动系统式(1)的状态轨迹可如图 1 所示。可以看出,驱动系统式(1)的状态存在混沌现象,可以看到一个明显的混沌吸引子。

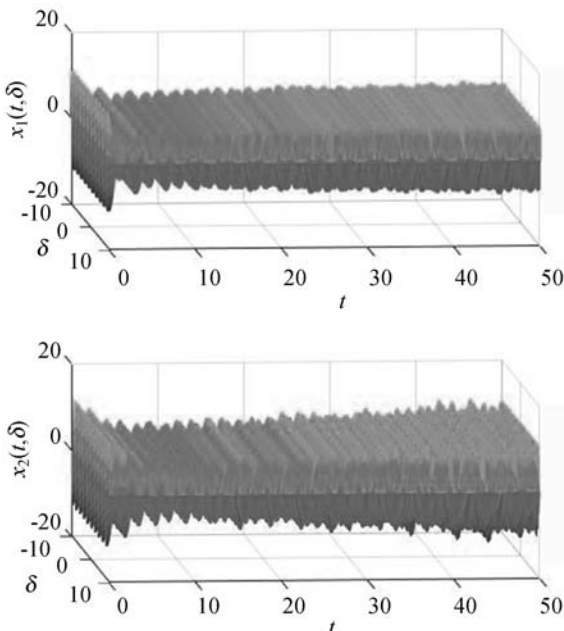


图 1  $x_1(t, \delta)$  和  $x_2(t, \delta)$  的轨迹

然后,利用 MATLAB 求解定理 1 中的不等式可得控制器增益如下:

$$K = \begin{bmatrix} 25.4218 & -0.3320 \\ 1.0683 & 19.6638 \end{bmatrix}$$

此外,响应系统式(2)的初始条件设为:

$$y_1(\vartheta, \delta) = 1.3 \sin(\delta)$$

$$y_2(\vartheta, \delta) = -1.2 \cos(\delta)$$

则我们可以获得误差系统式(3)的状态轨迹如图 2 所示。可以看出,在控制器式(5)的作用下,反同步误差系统可以快速收敛到 0,即驱动系统式(1)和响应系统式(2)可以反同步。

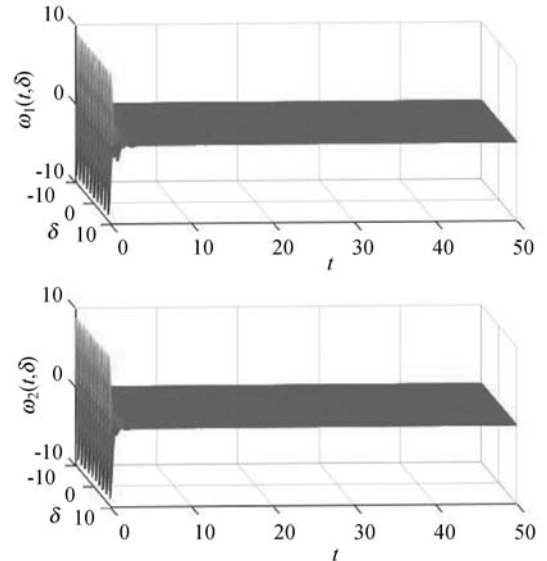


图 2  $\omega_1(t, \delta)$  和  $\omega_2(t, \delta)$  的轨迹

因此,参考文献[19],一个新的时空混沌密码系统就构建完成了,且可应用于图像保密通信。

混沌加密的原理就是在发送端把待传输的有用信号叠加上一个(或多个)混沌信号,使得在传输信道上的信号具有类似随机噪声的性态,进而达到加密保密通信的目的。在接收端通过对叠加的混沌信号的去掩盖,去除混沌信号,恢复出真正传输的信号。我们以图片“Lena”为例,具体的加密解密算法列述如下:

**步骤 1** 处理原始图像。利用 MATLAB 中的 rgb2gray 函数将原始的“Lena”彩图转换为灰度图,如图 3 所示。则图 3 可由不同灰度值的像素组成,假设为  $a_{ij}$ ,同时设图 1 的状态轨迹表示为  $b_{mn}$ ,且  $m > i, n > j$ 。

**步骤 2** 加密算法。采用如下加密算法:

$$q_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$

式中: $q_{ij}$ 表示加密后的图像像素值。加密后的图像如图 4 所示。对比图 3 和图 4,可以明显看到图像加密成功。在输出端假设响应系统状态轨迹表示为  $d_{mn}$ ,在控制器的作用下,利用反同步原理可知  $d_{mn} = -b_{mn}$ 。

**步骤 3** 解密算法。采用如下的解密算法:

$$q'_{ij} = q_{ij} \otimes (-d_{ij})$$

式中: $q'_{ij}$ 表示解密后的图像像素值。解密后的图像如图5所示。对比图3和图5,可以明显看到图像解密成功。自此实现了所构建的混沌密码系统在图像保密通信上的应用。



图3 “Lena”的灰度图

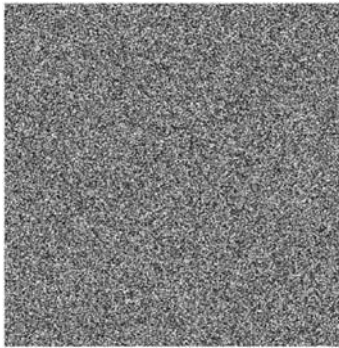


图4 加密后“Lena”的灰度图



图5 解密后“Lena”的灰度图

需要指出的是,一方面,由本文所给出的系统和加密原理可知,系统参数  $A、B、C、D、E、F$ , 初始条件  $\varphi_m(\vartheta, \delta)、\zeta_m(\vartheta, \delta)$  以及时间和空间的采样间隔均可视为本文构建的混沌密码系统的密钥,它们共同组成了一个足够大的密钥空间,任何一个密钥的不同都会导致解密的失败。

另一方面,我们给出原始灰度图和加密后灰度图的直方图,如图6和图7所示。灰度直方图中的像素值及其个数的分布关系能够很好地显示图像像素值之间的相关性。图6中,灰度直方图的轨迹很不平稳,因此,原灰度图的像素值相关性很高。图7中,加密后的灰度直方图轨迹平稳,说明加密图的像素值分布均匀,加密效果良好。

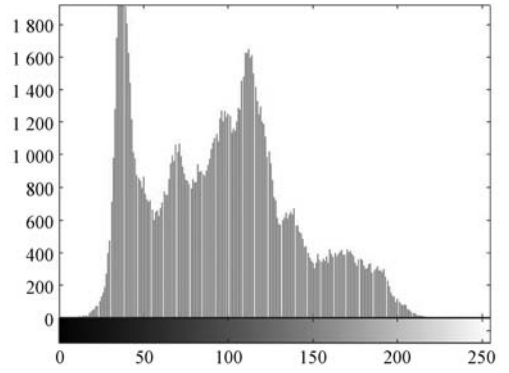


图6 原始“Lena”的灰度直方图

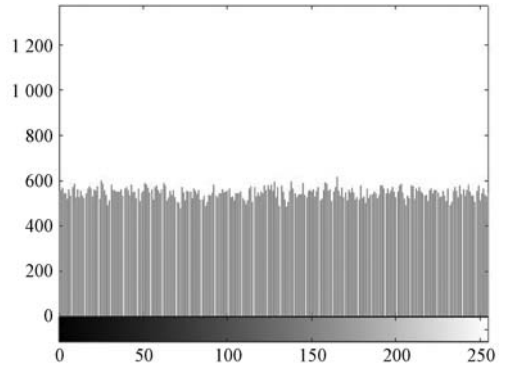


图7 加密后“Lena”的灰度直方图

最后,为了更精确地检验本文密码系统的加密效果,我们从对角线方向、水平方向和垂直方向计算出了相邻像素相关性的具体数值,并与一些现存文献进行了比较,如表1所示。

表1 加密后“Lena”的相关性比较

相关性	对角方向	水平方向	垂直方向
原始图像	0.965 4	0.932 8	0.975 5
本文	0.002 4	-0.000 8	0.001 9
文献[20]	0.003 8	0.004 1	0.003 6
文献[21]	0.081 6	0.040 1	0.004 7
文献[22]	-0.004 3	-0.003 7	0.019 6
文献[23]	0.006 9	-0.001 5	0.004 1
文献[24]	-0.024 2	0.069 3	0.061 0

如文献[20-24]所述,相邻像素的相关性是衡量加密算法优劣的重要指标,加密后的图像相邻像素相关性的绝对值越小,说明加密效果越好。由表1可知,与一些现存的文献相比,无论从对角线方向、水平方向,还是垂直方向,通过本文加密算法加密后的图像相关系数的绝对值都比较小。也就是说,本文加密后的图像像素值分布的无序性更强,因此,本文的加密算法抵抗恶意攻击的能力更强,具有更高的安全性,加密效果更好。

## 4 结 语

本文针对图像保密通信提出了一种新的时空混沌

密码系统。该系统由时空时滞惯性神经网络组成,并通过其反同步控制实现加密和解密的功能。为了更加贴合实际,本文首次同时将时空因素和分布时滞考虑进惯性神经网络中,并结合输出反馈控制和李雅普诺夫理论,利用先进的处理方法,得到了一个保守性较小的时空时滞惯性神经网络反同步定理。最终的仿真结果实现了图像保密通信,并通过一些比较说明了设计的时空混沌密码系统的优越性。

## 参 考 文 献

- [1] 景晨凯,宋涛,庄雷,等. 基于深度卷积神经网络的人脸识别技术综述[J]. 计算机应用与软件,2018,35(1):223-231.
- [2] Shirley C P, Mohan N R, Chitra B. Gravitational search-based optimal deep neural network for occluded face recognition system in videos[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing,2021,32(1):189-215.
- [3] 胡达,童仲志,侯远龙,等. 基于神经网络的PMSM分数阶积分滑模控制[J]. 兵工自动化,2019,38(5):81-85.
- [4] Zhang H, Wang X Y, Lin X H. Topology identification and Module-Phase synchronization of neural network with time delay[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics,2017,47(6):885-892.
- [5] Tang Z, Park J H, Feng J W. Impulsive effects on quasi-synchronization of neural networks with parameter mismatches and time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2017,29(4):908-919.
- [6] Zhou C, Zhang W L, Yang X S, et al. Finite-time synchronization of complex-valued neural networks with mixed delays and uncertain perturbations[J]. Neural Processing Letters, 2017,46(1):271-291.
- [7] 蒲浩,王来全,刘向虎. 具有反应扩散项的随机扰动神经网络在有限时间内的控制同步[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版),2019,42(5):442-450.
- [8] Lu B L, Jiang H J, Hu C, et al. Spacial sampled-data control for  $H_\infty$  output synchronization of directed coupled reaction-diffusion neural networks with mixed delays[J]. Neural Networks,2020,123:429-440.
- [9] Song X N, Man J T, Ahn C K, et al. Finite-time dissipative synchronization for Markovian jump generalized inertial neural networks with reaction-diffusion terms[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems,2019,51(6):3650-3661.
- [10] 周瑞,周立群. 一类具比例时滞Hopfield神经网络的全局渐近稳定性[J]. 西北大学学报(自然科学版),2019,49(5):716-722.
- [11] 潘青飞,张子芳. 一类随机时滞递归神经网络的指数稳定性[J]. 数学杂志,2014,34(3):487-496.
- [12] Wang L, Chen T P. Finite-time and fixed-time anti-synchronization of neural networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing,2019,329:165-171.
- [13] Chen W H, Luo S X, Wei X. Impulsive synchronization of reaction-diffusion neural networks with mixed delays and its application to image encryption[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2016,27(12):2696-2710.
- [14] Dharani S, Rakkiyappan R, Park J H. Pinning sampled-data synchronization of coupled inertial neural networks with reaction-diffusion terms and time-varying delays[J]. Neurocomputing,2017,227:101-107.
- [15] Kong F C, Zhu Q X, Sakthivel R, et al. Fixed-time synchronization analysis for discontinuous fuzzy inertial neural networks with parameter uncertainties[J]. Neurocomputing, 2020,422:295-313.
- [16] Kong F C, Zhu Q X, Huang T W. New fixed-time stability lemmas and applications to the discontinuous fuzzy inertial neural networks[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021,29(12):3711-3722.
- [17] Feng Y M, Xiong X L, Tang R Q, et al. Exponential synchronization of inertial neural networks with mixed delays via quantized pinning control[J]. Neurocomputing,2018,310:165-171.
- [18] Zhang G D, Zeng Z G, Ning D. Novel results on synchronization for a class of switched inertial neural networks with distributed delays[J]. Information Sciences,2020,511:114-126.
- [19] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica,2011,47(1):235-238.
- [20] Kar M, Mandal M K, Nandi D. RGB image encryption using hyper chaotic system[C]//3rd International Conference on Research in Computational Intelligence and Communication Networks,2017:354-359.
- [21] Zhang L H, Liao X F, Wang X B. An image encryption approach based on chaotic maps[J]. Chaos Solitons & Fractals,2005,24(3):759-765.
- [22] Chen W H, Luo S X, Zheng W X. Impulsive synchronization of reaction-diffusion neural networks with mixed delays and its application to image encryption[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2016,27(12):2696-2710.
- [23] Xu Q Y, Sun K H, Cao C, et al. A fast image encryption algorithm based on compressive sensing and hyperchaotic map[J]. Optics and Lasers in Engineering,2019,121:203-214.
- [24] Farah M, Guesmi R, Kachouri A, et al. A novel chaos based optical image encryption using fractional Fourier transform and DNA sequence operation[J]. Optics & Laser Technology,2020,121:105777.