

# 一种利用平面绕轴转动进行轴标定的方法

徐杰 李振亮 梁吉祥

(北京城市学院3D打印研究院 北京 100083)

**摘要** 提出一种基于平面绕轴转动计算转轴直线方程的方法。分别讨论了多平面方程组的秩为3和秩为2两种情况的解法。除了秩为1的情形外,该方法适用于大部分的转轴标定情况。实验表明转轴标定误差与平面方程系数的误差大小成正比,标定精度优于基于空间点绕轴转动方法的标定精度。

**关键词** 转轴 标定 平面转动

中图分类号 TP391

文献标志码 A

DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2024.05.017

## A METHOD OF AXIS CALIBRATION FROM PLANE ROTATION

Xu Jie Li Zhenliang Liang Jixiang

(3D Printing Research Institute, Beijing City University, Beijing 100083, China)

**Abstract** This paper presents a method of axis calibration based on the plane rotating around the axis. The solutions of multi plane equations with rank 3 and rank 2 were discussed respectively. Except for the case of rank 1, this method was suitable for most of the axis calibration cases. The experiment shows that the calibration error is proportional to the error of plane equations coefficients. The calibration accuracy is better than that of the method based on the rotation of space points around the axis.

**Keywords** Rotating axis Calibration Plane rotation

## 0 引言

在数控加工、机器人运动、三维测量中,经常要先确定某个转轴的空间直线方程。转轴的空间直线方程一般表示为:

$$\frac{x-x_0}{x_n} = \frac{y-y_0}{y_n} = \frac{z-z_0}{z_n}$$

式中:  $(x_n, y_n, z_n)$  是转轴直线的单位向量;  $(x_0, y_0, z_0)$  是转轴经过的一个空间点。

何万涛等<sup>[1]</sup>、徐永安等<sup>[2]</sup>、吕海东等<sup>[3]</sup>使用基于一个同名点绕转轴转动的多角度( $\geq 3$ )空间坐标,拟合出同名点空间轨迹的圆方程的方法,解算出转轴直线方程。但如果同名点空间位置的测量不精确,解算出的转轴也不精确,且这种误差与空间点位置测量误差呈正比。张小琛等<sup>[4]</sup>、叶浩<sup>[5]</sup>、Park等<sup>[6]</sup>给出了基于多个同名点的方法,可以平均掉这种测量误差,解算出较高精度的转轴方程,但多个同名点的匹配是一个

问题。在有些情况下,同名点无法匹配。比如,我们只能测量到一个空间平面(比如平面点云拟合)的方程,平面绕转轴转动,得到多个空间平面方程。

其实,基于绕轴转动的多个空间平面方程,也可以解算出转轴直线方程。许佩<sup>[7]</sup>、Ye<sup>[8]</sup>给出了利用平面垂直放置于转台的转轴标定方法,但是要求平面严格垂直于转台平面,物理上是很难实现的。本文给出的基于平面的标定方法,对平面放置角度没有要求。

## 1 基于多个平面方程的转轴方程解算

设一平面绕轴转动,测量得到  $m$  ( $\geq 3$ ) 个空间平面方程,分别为:

$$\begin{cases} A_1 \times x + B_1 \times y + C_1 \times z + D_1 = 0 \\ A_2 \times x + B_2 \times y + C_2 \times z + D_2 = 0 \\ \vdots \\ A_m \times x + B_m \times y + C_m \times z + D_m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

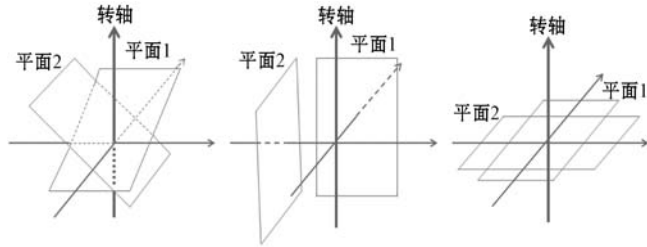
式中:平面方程的系数 $(A_i, B_i, C_i)$ 为各平面的单位法向量,且法向量朝向一致,都是指向转轴上某一点(例如被测量物体所在位置)的方向; $D_i$ 为原点到平面的有向距离。

平面绕轴转动如图 1 所示,转轴上任意一点  $p = (x, y, z)'$  到各个平面的垂直有向距离应该相等,设为  $t$  ( $\geq 0$ ),则有向距离满足方程组:

$$\begin{cases} A_1 \times x + B_1 \times y + C_1 \times z + D_1 = \\ A_2 \times x + B_2 \times y + C_2 \times z + D_2 = \\ \vdots \\ A_m \times x + B_m \times y + C_m \times z + D_m = \\ t \end{cases} \quad (2)$$

将方程组写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & B_m & C_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} \quad (3)$$



(a) 平面与转轴夹角在 10 度到 80 度之间 (b) 平面与转轴夹角在 0 度到 10 度之间 (c) 平面与转轴夹角在 80 度到 90 度之间

图 1 平面绕轴转动

### 1.1 秩为 3 的多平面方程组的逆矩阵解法

设:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & B_m & C_m \end{pmatrix}$$

则:

$$A'A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = tA' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - A' \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix}$$

两边乘以  $(A'A)^{-1}$ , 得:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t(A'A)^{-1}A' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - (A'A)^{-1}A' \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \quad (4)$$

因为  $p = (x, y, z)'$  为转轴上任意一点,所以此方程就是转轴的关于参数  $t$  的直线方程,  $(a, b, c)'$  就是转轴的直线方向,令  $t = 0$ , 得出转轴经过空间点  $(x_0, y_0, z_0)' = (-d, -e, -f)'$ 。由:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

还可以算出转轴直线方向的单位向量  $(x_n, y_n, z_n)'$ , 这里  $h$  是归一化因子,  $x_n \times x_n + y_n \times y_n + z_n \times z_n = 1$ 。

以上能够解算的条件是矩阵  $A'A$  存在逆矩阵。当平面垂直于转轴时,  $A'A$  的秩为 1, 这时无法确定转轴位置。当平面平行于转轴时,  $A'A$  的秩为 2, 这时虽然由式(4)不能解算转轴,但是可以用别的方法解算。

### 1.2 秩为 2 的多平面方程组的奇异值分解解法

对矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & B_m & C_m \end{pmatrix}$  进行奇异值分解, 得:

$$A = U\Sigma V' = U_{m \times m} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V'_{3 \times 3}, \text{ 其中: } U, V$$

是正交阵;  $\Sigma$  是协方差矩阵;  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \gg \sigma_3 \geq 0, \sigma_3$  接近于 0, 或等于 0。转轴上任一点到各平面的有向距离应该相等, 由式(3)有:

$$U\Sigma V' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

令  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = V' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $V$  是一个空间坐标系旋转变换, 则:

换, 则:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = tU' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - U' \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{这里令 } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix}。 \text{且只看}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} \frac{u_1 \times \sigma_3}{\sigma_1 \times u_3} \\ \frac{u_2 \times \sigma_3}{\sigma_2 \times u_3} \\ \frac{\sigma_2 \times u_3}{1} \end{pmatrix} \times h_1 \quad (11)$$

前 3 行,有:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

把  $t$  移到等式左边,  $z'$  移到等式右边,有:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & -u_1 \\ 0 & \sigma_2 & -u_2 \\ 0 & 0 & -u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t \end{pmatrix} = z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

等式左边矩阵一般秩为 3, 逆矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & -\frac{u_1}{\sigma_1 \times u_3} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & -\frac{u_2}{\sigma_2 \times u_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u_3} \end{pmatrix}$$

等式两边同乘以该逆矩阵:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t \end{pmatrix} = z' \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & -\frac{u_1}{\sigma_1 \times u_3} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & -\frac{u_2}{\sigma_2 \times u_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & -\frac{u_1}{\sigma_1 \times u_3} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & -\frac{u_2}{\sigma_2 \times u_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

有:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t \end{pmatrix} = z' \begin{pmatrix} \frac{u_1 \times \sigma_3}{\sigma_1 \times u_3} \\ \frac{u_2 \times \sigma_3}{\sigma_2 \times u_3} \\ \frac{\sigma_3}{u_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中:  $(d_1, d_2, d_3)'$  由上面逆矩阵乘以  $(c_1, c_2, c_3)'$  算出。对于转轴上任意两点  $p_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)'$ 、 $p_2 = (x'_2, y'_2, z'_2)'$ , 转轴直线的方向为:

$$\overrightarrow{p_2 - p_1} = \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 \\ y'_2 - y'_1 \\ z'_2 - z'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 \times \sigma_3}{\sigma_1 \times u_3} \\ \frac{u_2 \times \sigma_3}{\sigma_2 \times u_3} \\ 1 \end{pmatrix} (z'_2 - z'_1) = h \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

这里  $h$  是向量归一化因子。变换回原始坐标系, 转轴直线方向的单位向量是:

这里  $h_1$  是向量归一化因子。令  $z' = 0$ , 由式(9)可以解出  $(x', y') = (-d_1, -d_2)$ , 即转轴穿过点:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = V \times \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中:  $z' = 0$  所表示的平面经过原点, 其法向就是  $A$  矩阵奇异值分解中  $V$  的第三列向量。当  $\sigma_3$  很小时, 此法向与转轴基本平行, 当  $\sigma_3 = 0$  时, 此法向与转轴平行。可以保证  $z' = 0$  平面与转轴直线有交点。

## 2 实验结果

我们分别对秩为 3 和秩为 2 两种情况做实验。

### 2.1 秩为 3 实验结果

假设旋转轴线为  $z$  轴, 平面与原点有向距离为 +1, 平面与  $z$  轴夹角为 30 度(法线向上), 平面绕轴线旋转的四个平面方程分别为:

$$\begin{cases} 0 \times x - \frac{\sqrt{3}}{2} \times y + \frac{1}{2} \times z + 1 = 0 \\ 0 \times x + \frac{\sqrt{3}}{2} \times y + \frac{1}{2} \times z + 1 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \times x + 0 \times y + \frac{1}{2} \times z + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times x + 0 \times y + \frac{1}{2} \times z + 1 = 0 \end{cases}$$

则令:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{则有 } A'A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

则转轴直线上的任意一点坐标应符合:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t(A'A)^{-1}A' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - (A'A)^{-1}A' \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

所以,求出转轴直线单位向量为:  $(x_n, y_n, z_n)' = (0, 0, 1)'$ , 经过空间点  $(x_0, y_0, z_0)' = (0, 0, 2)'$ 。

现在,给平面方程各个系数一个随机扰动,  $(A_i, B_i, C_i)$  的扰动范围是  $(-1, 1)$  的均匀分布随机数乘以一个百分比,  $D_i$  的扰动范围是  $(-D_i, D_i)$  的均匀分布随机数乘以一个百分比。向量误差是指向量解算值与理想值的空间距离。

如表 1 - 表 3 所示,方程系数的误差分别在 0.1%、1%、10% 范围变化时,模拟实验的向量计算结果的平均误差分别为 0.064 9%、0.585 3%、4.875 7%,基本成正比。

表 1 秩为 3 平面方程系数误差在 0.1% 范围内的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 $(x_0, y_0, z_0)'$	解算出的 的向量 $(x_n, y_n, z_n)'$	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	-0.000 9	-0.865 4	0.500 3	1	(0.001 4, 0.000 4, 1.999 6)	(0.000 6, -0.000 1, 1.000 0)	0.060 8
	-0.000 1	0.865 4	0.500 4	1.000 9			
	-0.866 3	0	0.500 5	0.999 7			
	0.866 6	-0.000 1	0.499 6	1.000 2			
2 次	-0.000 6	-0.865 6	0.499 3	0.999 5	(-0.000 6, 0.000 6, 2.001 5)	(-0.000 7, -0.000 0, 1.000 0)	0.070 0
	0.000 5	0.866 8	0.499 3	1.000 6			
	-0.866 5	0.000 9	0.499 5	0.999 5			
	0.866 0	0.000 1	0.500 7	1.000 9			
3 次	-0.000 3	-0.866 1	0.500 1	1.000 5	(-0.001 7, -0.001 3, 1.998 8)	(-0.000 5, -0.000 4, 1.000 0)	0.064 0
	-0.000 6	0.865 7	0.500 8	0.999 8			
	-0.866 5	0.000 7	0.499 6	1.000 1			
	0.866 3	0.000 2	0.500 5	0.999 2			
平均值							0.064 9

表 2 秩为 3 平面方程系数误差在 1% 范围内的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 $(x_0, y_0, z_0)'$	解算出的 的向量 $(x_n, y_n, z_n)'$	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	-0.007 1	-0.865 8	0.492 5	0.991 0	(-0.009 4, 0.008 5, 2.024 9)	(-0.002 1, -0.000 7, 1.000 0)	0.221 4
	0.007 1	0.864 1	0.493 7	1.008 1			
	-0.863 6	-0.008 5	0.494 8	1.008 9			
	0.863 0	-0.005 2	0.498 3	0.999 8			
2 次	-0.000 2	-0.873 8	0.498 1	1.009 1	(-0.016 9, 0.002 7, 2.006 7)	(-0.009 4, 0.003 5, 0.999 9)	1.003 1
	-0.003 2	0.871 6	0.491 9	1.001 5			
	-0.858	-0.002 2	0.492 6	0.991 2			
	0.863 4	-0.005 2	0.508 8	0.994 7			
3 次	-0.002 9	-0.872 6	0.499 0	0.993 8	(-0.008 1, 0.003 5, 1.993 4)	(-0.005 2, -0.001 1, 1.000 0)	0.531 5
	0.006 4	0.869 0	0.500 9	1.003 7			
	-0.875 7	0.004 6	0.495 9	0.993 7			
	0.856 9	0.003 0	0.504 9	0.997 4			
平均值							0.585 3

表 3 秩为 3 平面方程系数误差在 10% 范围内的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 $(x_0, y_0, z_0)'$	解算出的 的向量 $(x_n, y_n, z_n)'$	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	0.025 1	-0.810 9	0.461 3	1.059 0	(-0.016 9, -0.063 0, 2.028 5)	(-0.031 0, -0.022 1, 0.999 3)	3.807 8
	0.056 0	0.863 4	0.501 7	1.028 9			
	-0.949 8	-0.012 8	0.502 2	0.975 7			
	0.951 9	-0.010 6	0.563 5	1.062 3			
2 次	0.006 6	-0.856 0	0.460 2	0.939 0	(-0.135 0, -0.035 5, 1.919 4)	(-0.073 6, -0.020 4, 0.997 1)	7.643 0
	-0.029 9	0.890 5	0.494 2	0.945 2			
	-0.778 2	0.017 4	0.446 1	0.934 1			
	0.941 2	-0.058 5	0.568 9	0.945 5			
3 次	-0.012 9	-0.929 1	0.422 2	0.952 4	(-0.113 4, -0.000 5, 2.105 1)	(-0.026 7, -0.017 2, 0.999 5)	3.176 4
	-0.037 8	0.947 0	0.451 6	1.020 6			
	-0.781 3	0.095 9	0.481 7	1.042 2			
	0.852 1	-0.012 2	0.519 0	0.944 3			
平均值							4.875 7

### 2.2 秩为 2 实验结果

假设旋转轴线为 z 轴,平面与原点有向距离为 +1,平面与 z 轴夹角为 0 度(法线向原点),平面绕轴线旋转的四个平面方程分别为:

$$\begin{cases} 0 \times x - 1 \times y + 0 \times z + 1 = 0 \\ 0 \times x + 1 \times y + 0 \times z + 1 = 0 \\ -1 \times x + 0 \times y + 0 \times z + 1 = 0 \\ +1 \times x + 0 \times y + 0 \times z + 1 = 0 \end{cases}$$

则令:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } A'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩为 2,不能通过求逆矩阵方法解算转轴。采用奇异值分解方法,对 A 做奇异值分解:

$$A = U \Sigma V' = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(6)有:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由式(9)有:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & -\frac{u_1}{\sigma_1 \times u_3} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & -\frac{u_2}{\sigma_2 \times u_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{0}{\sqrt{2} \times 1} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{0}{\sqrt{2} \times 1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

由式(11)有:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{V} \times \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = \mathbf{V} \times \begin{pmatrix} \frac{u_1 \times \sigma_3}{\sigma_1 \times u_3} \\ \frac{u_2 \times \sigma_3}{\sigma_2 \times u_3} \\ 0 \end{pmatrix} \times h_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由式(12)有:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{V} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{V} \times \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以,求出转轴直线单位向量为:  $(x_n, y_n, z_n)' = (0, 0, 1)'$ , 经过空间点  $(x_0, y_0, z_0)' = (0, 0, 0)'$ 。

现在,给平面方程各个系数一个随机扰动,  $(A_i, B_i, C_i)$  的扰动范围是  $(-1, 1)$  的均匀分布随机数乘以一个百分比,  $D_i$  的扰动范围是  $(-D_i, D_i)$  的均匀分布随机数乘以一个百分比。向量误差是指向量解算值与理想值的空间距离。

如表 4 - 表 6 所示,方程系数的误差分别在 0.1%、1%、10% 范围变化时,模拟实验的向量计算结果的平均误差分别为 0.040 3%、0.532 8%、6.020 5%,基本成正比。

表 4 秩为 2 平面方程系数误差在 0.1% 范围内时的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 ( $x_0, y_0, z_0$ )'	解算出的 向量 ( $x_n, y_n, z_n$ )'	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	-0.000 3	-0.999 2	-0.000 2	1.000 1	(0.000 8, -0.000 3, -0.000 0)	(0.000 0, -0.000 2, 1.000 0)	0.018 9
	0.000 7	0.999 6	0.000 1	1.000 6			
	-0.999 8	0.000 5	-0.000 8	1.000 9			
	1.000 1	0.000 5	-0.000 9	0.999 3			

续表 4

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 ( $x_0, y_0, z_0$ )'	解算出的 向量 ( $x_n, y_n, z_n$ )'	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
2 次	-0.000 1	-1.000 5	-0.000 4	1.000 8	(0.000 4, -0.000 0, 0.000 0)	(0.000 2, -0.000 6, 1.000 0)	0.065 9
	-0.000 5	0.999 3	0.000 8	1.001 0			
	-0.999 3	-0.000 5	-0.000 1	0.999 9			
	0.999 4	-0.000 1	-0.000 6	0.999 2			
3 次	-0.000 2	-0.999 7	0.000 4	1.000 3	(0.000 6, 0.000 5, 0.000 0)	(0.000 4, -0.000 1, 1.000 0)	0.036 0
	0.000 8	0.999 1	0.000 5	0.999 3			
	-0.999 4	0.000 7	0.000 5	1.000 4			
	1.000 9	0.000 9	-0.000 2	0.999 1			
平均值						0.040 3	

表 5 秩为 2 平面方程系数误差在 1% 范围内时的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 ( $x_0, y_0, z_0$ )'	解算出的 向量 ( $x_n, y_n, z_n$ )'	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	-0.004 5	-0.996 1	-0.001 2	0.993 7	(-0.002 1, -0.003 1, 0.000 0)	(-0.000 4, 0.000 6, 1.000 0)	0.068 0
	-0.009 1	0.996 3	-0.002 4	0.999 8			
	-1.008 1	0.009 0	0.005 3	0.998 9			
	1.006 5	-0.009 3	0.005 9	1.002 9			
2 次	0.004 2	-0.996 9	0.009 2	1.005 0	(-0.002 0, 0.005 0, -0.000 0)	(0.003 6, 0.006 2, 1.000 0)	0.713 4
	0.005 1	0.993 3	-0.003 2	0.995 1			
	-1.004 5	-0.007 6	0.001 7	1.000 1			
	1.003 6	-0.000 0	-0.005 5	1.004 0			
3 次	0.007 8	-1.007 0	0.006 3	0.993 9	(0.001 5, -0.000 6, 0.000 0)	(0.005 9, 0.005 7, 1.000 0)	0.817 0
	0.009 2	0.995 2	-0.005 1	0.995 0			
	-0.999 1	0.006 8	0.008 6	1.002 3			
	0.992 8	-0.004 9	-0.003 0	0.999 5			
平均值						0.532 8	

表 6 秩为 2 平面方程系数误差在 10% 范围内时的模拟实验结果

次数	四个平面方程的系数 ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )				解算出的 经过点 ( $x_0, y_0, z_0$ )'	解算出的 向量 ( $x_n, y_n, z_n$ )'	向量 误差 /%
	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$			
1 次	-0.029 7	-0.916 6	-0.023 9	1.006 2	(0.080 3, -0.031 0, -0.000 7)	(0.000 9, -0.021 6, 0.999 8)	2.157 3
	0.066 2	0.957 2	0.013 6	1.055 8			
	-0.982 9	0.051 4	-0.084 8	1.086 8			
	1.009 9	0.050 7	-0.089 2	0.926 0			
2 次	0.013 8	-1.067 6	-0.066 9	1.037 8	(0.030 9, -0.006 2, 0.000 9)	(-0.036 1, -0.041 1, 0.998 5)	5.472 0
	-0.006 1	1.058 9	0.020 4	1.049 6			
	-1.097 6	-0.037 8	-0.047 4	0.990 1			
	0.967 4	0.005 7	0.030 8	0.916 8			
3 次	-0.054 2	-0.992 3	-0.078 7	1.063 5	(-0.030 3, -0.008 5, -0.002 8)	(-0.069 3, -0.077 8, 0.994 6)	10.432 3
	0.082 7	1.099 2	0.092 4	1.073 7			
	-1.069 5	-0.084 4	-0.099 1	0.916 9			
	1.065 2	-0.011 5	0.055 0	0.980 0			
平均值						6.020 5	

### 3 结 语

由实验可见,使用平面方程法,可以求解的转轴。解算误差与平面方程系数的测量误差成正比(逆矩阵求解时正比于  $\|A\|^{-1}$ )。如果是通过同名点拟合圆的方法求解转轴直线方程,解算误差与同名点的测量误差也成正比。但是,平面方程的系数是多点的点云拟合结果,误差一般远小于单个空间点的测量误差,所以采用平面方程法计算转轴的精度一般更高。

本文提出两种平面方程方法标定转轴。当旋转平面与转轴夹角在 10 度至 80 度之间时,多平面方程组的秩为 3,可以用求逆矩阵的方法求解转轴。当旋转平面与转轴夹角在 0 度至 10 度之间时,多平面方程组的秩为(或趋近)2,可以用奇异值分解的方法求解转轴。当旋转平面与转轴夹角在 80 度至 90 度之间时,多平面方程组的秩为(或趋近)1,不能用多平面方法求解转轴。

### 参 考 文 献

[1] 何万涛,马鹤瑶,郭延艳,等. 航空叶片非接触光学测量的转轴精密标定方法[J]. 黑龙江科技大学学报,2017,27(2):181-185.

[2] 徐永安,杨钦,怀进鹏. 激光旋转扫描测量系统中转轴标定及多视拼合[J]. 中国激光,2005,32(5):659-662.

[3] 吕海东,任永潮,戴士杰,等. 基于 2D 靶标的摄像机与转台中心轴同步标定方法[J]. 传感器与微系统,2019,38(7):23-27.

[4] 张小琛,刘德平,高建设. 线结构光圆柱度测量装置的转轴标定算法[J]. 机械设计与制造,2020(10):102-104,109.

[5] 叶浩. 基于线激光扫描的高铁轮毂自动三维测量关键技术研究[D]. 武汉:华中科技大学,2018:34-36.

[6] Park S Y, Subbarao M. A multiview 3D modeling system based on stereo vision techniques[J]. Machine Vision and Applications,2005,16:148-156.

[7] 许佩. 结构光三维扫描系统多视角自动拼接算法研究[D]. 桂林:桂林电子科技大学,2019:21-22.

[8] Ye Y. An accurate 3D point cloud registration approach for the turntable-based 3D scanning system[C]//IEEE International Conference on Information and Automation,2015:982-986.

(上接第 62 页)

[8] 杨彦杰,陈雨若,唐圣学. 基于神经网络的混合储能系统能量管理策略[J]. 计算机仿真,2020,37(9):88-92.

[9] 程志江,李永东,谢永流,等. 带超级电容的光伏发电微网系统混合储能控制策略[J]. 电网技术,2015,39(10):

2739-2745.

[10] 李逢兵,谢开贵,张雪松,等. 基于锂电池充放电状态的混合储能系统控制策略设计[J]. 电力系统自动化,2013,37(1):70-75.

[11] 杨帆,任永峰,云平平,等. 双级锂电池-超级电容混合储能的协调控制及功率分配[J]. 可再生能源,2019,37(3):361-366.

[12] 张野,郭力,贾宏杰,等. 基于平滑控制的混合储能系统能量管理方法[J]. 电力系统自动化,2012,36(16):36-41.

[13] 周鹏伟,程志江,陈星志,等. 带混合储能的微网并网控制策略研究[J]. 可再生能源,2017,35(4):578-584.

[14] 张纯江,董杰,刘君,等. 蓄电池与超级电容混合储能系统的控制策略[J]. 电工技术学报,2014,29(4):334-340.

[15] 周鹏伟,程志江,孙奥,等. 微电网供电系统混合储能优化控制研究[J]. 计算机仿真,2016,33(12):138-142.

[16] 刘道兵,李留根,李世春,等. 含混合储能系统的独立直流微网协调控制策略[J]. 可再生能源,2020,38(4):524-531.

[17] 黄炼,王朴,武建文,等. 分布式光-储发电系统的双向 DC-DC 非线性控制[J]. 电工技术学报,2016,31(S2):0-18.

[18] 李虹,尚佳宁,陈姚,等. 基于 fal 函数的非线性 PI 控制器在 DC-DC 变换器中的应用[J]. 电工技术学报,2014,29(S1):326-331.

[19] 武伟,谢少军,张墨,等. 基于 MMC 双向 DC-DC 变换器的超级电容储能系统控制策略分析与设计[J]. 中国电机工程学报,2014,34(27):4568-4575.

[20] 续丹,周佳辉,王斌,等. 电动汽车混合储能系统的自适应协同控制[J]. 西安交通大学学报,2019,53(4):38-43.

[21] Golchoubian P, Azad N L. Real-time nonlinear model predictive control of a battery - supercapacitor hybrid energy storage system in electric vehicles[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2017,66(11):9678-9688.

[22] Hredzak B, Agelidis V G, Jang M. A model predictive control system for a hybrid battery-ultracapacitor power source[J]. IEEE Transactions on Power Electronics,2014,29(3):1469-1479.

[23] 张巍巍,王京. 基于指数趋近律的非奇异 Terminal 滑模控制[J]. 控制与决策,2012,27(6):909-913.

[24] 韩京清. 自抗扰控制技术[J]. 前沿科学,2007(1):24-31.

[25] 韩京清. 从 PID 技术到“自抗扰控制”技术[J]. 控制工程,2002(3):13-18.

[26] 王坦坦,孙树敏,王楠,等. 基于混合储能的微电网控制策略研究[J]. 现代电子技术,2020,43(21):119-121.

[27] 杨惠,骆姗,孙向东,等. 光伏储能双向 DC-DC 变换器的自抗扰控制方法研究[J]. 太阳能学报,2018,39(5):1342-1350.

[28] 朱昊,韦钢,吴万禄,等. 自抗扰技术在微电网下垂控制策略中的应用[J]. 电力系统保护与控制,2014,42(9):61-67.